**Stoch. Proc. Exam, January 9, 2018. MAGYAR VERZIÓ A TÚLOLDALON!**

*Info:* Each of the 4 questions is worth 25 marks. Write your name and Neptun code on each piece of paper that you submit. Separate the solutions of different exercises (and sub-exercises) with a horizontal line. No calculators or electronic devices are allowed. No formula sheets are allowed. You have 90 minutes to complete this exam. You need to collect at least 40 points on this exam in order to pass the course.

1. *Volleyball.* Teams 1 and 2 play. The game is subdivided into rallies. The team that wins the rally serves the ball to start the next rally. If team 1 serves then team 1 wins the rally with probability 3/4. If team 2 serves then team 2 wins the rally with probability 1/2. To get the game started, a team is chosen to serve in the first round by a fair coin toss. What is the probability that team 1 serves in the ninth rally?

2. (a) (5 marks) Let $Y_1, Y_2, \dots$ denote i.i.d. $\mathbb{N}$-valued random variables. Moreover, let $N$ denote an $\mathbb{N}$-valued random variable, which is independent of $Y_1, Y_2, \dots$. Let $X = Y_1 + \cdots + Y_N$. State and prove the lemma which relates the generating functions of $Y_1$, $N$ and $X$.

   (b) (5 marks) Define the notion of a Galton-Watson branching process $(X_n)$ with offspring distribution $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Explain the intuitive meaning of $X_n$ in terms of a population model. Describe the transition rules of the Markov chain $(X_n)$.

   (c) (5 marks) Express the generating function of $X_n$ given the generating function of $X_1$, clearly indicating where you used parts (a) and (b) of this exercise.

   (d) (10 marks) State and prove the formula for $\mathbb{P}(\,\exists n\,:\, X_n = 0 \mid X_0 = 1\,)$. Sketch pictures of generating functions to illustrate the difference between the *subcritical* and *supercritical* cases.

3. (a) (5 marks) Define the notion of a time-homogeneous Poisson point process with intensity $\lambda \in \mathbb{R}_+$ by introducing its counting process $(N_t)$ and listing the defining properties of $(N_t)$.

   (b) (5 marks) Argue why $(N_t)$ is a continuous-time Markov chain with state space $\mathbb{N}$ and write down its infinitesimal generator matrix $\underline{\underline{G}} = (g(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}}$.

   (c) (5 marks) Find the transition matrix $\underline{\underline{P_t}} = (p_t(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}}$ of $(N_t)$.

   (d) (10 marks) Check by hand that $p_t(0,y)$, $y \in \mathbb{N}$ satisfy the *Kolmogorov forward* equations.

4. Let us consider the discrete-time birth/death process $(X_n)$ with state space $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ and transition rules $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x\,) = p(x,y)$, where $p(x, x+1) = p_x$, $p(x, x-1) = q_x$ and $p(x,x) = 1 - p_x - q_x$ for any $x = 1, 2, \dots$. Let us further assume that $p(0,0) = 1$ (i.e., that 0 is an absorbing state). Let us define the function $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ by

$$\alpha(x) = \sum_{y=0}^{x-1} \frac{q_1 q_2 \dots q_y}{p_1 p_2 \dots p_y}. \qquad \text{(Note: } \alpha(0) = 0 \text{ and } \alpha(1) = 1\text{)}$$

   (a) (15 marks) Show that $(M_n)$ is a martingale, where $M_n := \alpha(X_n)$.

   (b) (10 marks) Calculate $\mathbb{P}(T_N < T_0)$, where $T_y = \min\{\,n : X_n = y\,\}$, if $X_0 = x$, where $0 \le x \le N$.

**Sztoch. Foly. Vizsga, Jan. 9, 2018. ENGLISH VERSION ON OTHER SIDE!**

*Info:* Mind a 4 kérdés 25 pontot ér. Írja fel a nevét és a Neptun-kódját minden oldalra, amit bead. Válassza el a különböző feladatok (és rész-feladatok) megoldásait egy-egy vízszintes vonallal. Kérjün ne használjon számológépet, elektromos segédeszközt vagy képletgyűjteményt. A vizsga 90 perces. A vizsgán minimum 40 pontot kell szerezni ahhoz, hogy teljesítse a kurzus követelményeit.

1. *Röplabda.* Az 1-es és a 2-es csapat versenyzik egymással. A meccs menetekből áll. Az aktuális menetet nyerő csapat szerválhat a következő menetben. Ha az 1-es csapat szervál, akkor az 1-es csapat 3/4 valószínűséggel nyeri a menetet. Ha a 2-es csapat szervál, akkor a 2-es csapat 1/2 valószínűséggel nyeri a menetet. Egy szabályos érmedobással válsztják ki azt, hogy melyik csapat szervál az első menetben. Mekkora valószínűséggel szervál az 1-es csapat a kilencedik menetben?

2. (a) (5 pont) Legyenek $Y_1, Y_2, \dots$ f.a.e. $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi vátozók. Legyen $N$ egy $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi vátozó, ami független $Y_1, Y_2, \dots$-től. Legyen $X = Y_1 + \cdots + Y_N$. Mondja ki és bizonyítsa azt a lemmát, ami $Y_1$, $N$ és $X$ generátorfüggvényei közt mond ki összefüggést.

   (b) (5 pont) Definiálja a $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ utód-eloszlású $(X_n)$ Galton-Watson elágazó folyamat fogalmát. Magyarázza el $X_n$ intuitív jelentését ebben a populációs modellben. Írja le az $(X_n)$ Markov lánc átmeneti szabályait.

   (c) (5 pont) Fejezze ki az $X_n$ generátorfüggvényét az $X_1$ generátorfüggvényének segítségével, világosan jelezve, hogy hol használta ezen feladat (a) és (b) részfeladatait.

   (d) (10 pont) Mondja ki és bizonyítsa a $\mathbb{P}(\,\exists n\,:\,X_n = 0 \mid X_0 = 1\,)$ értékére vonatkozó formulát. Illusztrálja rajzzal a *szubkritikus* és *szuperkritikus* esetek generátorfüggvényei közti különbséget.

3. (a) (5 pont) Definiálja a $\lambda \in \mathbb{R}_+$ paraméterű időben homogén Poisson pontfolyamat fogalmát: vezesse be az $(N_t)$ számlálófolyamatot és sorolja fel $(N_t)$ definiáló tulajdonságait.

   (b) (5 pont) Érveljen amellett, hogy miért folytonos idejű Markov lánc $(N_t)$ az $\mathbb{N}$ állapottéren, és írja le a $\underline{\underline{G}} = (g(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}}$ infinitezimális generátor mátrixot.

   (c) (5 pont) Írja fel az $(N_t)$ folyamat $\underline{\underline{P_t}} = (p_t(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}}$ átmenet-mátrixát.

   (d) (10 pont) Ellenőrizze kézzel, hogy $p_t(0,y)$, $y \in \mathbb{N}$ kielégítik a *Kolmogorov forward* egyenleteket.

4. Tekintsük az $(X_n)$ diszkrét idejű születési-halálozási folyamatot az $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ állapottéren, melynek az átmenet-valószínűségei $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x\,) = p(x,y)$, ahol $p(x,x+1) = p_x$, $p(x,x-1) = q_x$ és $p(x,x) = 1 - p_x - q_x$ bármely $x = 1,2,\dots$ esetén. Tegyük továbbá fel, hogy $p(0,0) = 1$ (azaz a 0 elnyelő állapot). Definiáljuk az $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt ily módon:

$$\alpha(x) = \sum_{y=0}^{x-1} \frac{q_1 q_2 \dots q_y}{p_1 p_2 \dots p_y}. \qquad \text{(Megj: } \alpha(0) = 0 \text{ és } \alpha(1) = 1\text{)}$$

   (a) (15 pont) Mutassa meg, hogy $(M_n)$ martingál, ahol $M_n := \alpha(X_n)$.

   (b) (10 pont) Számítsa ki $\mathbb{P}(T_N < T_0)$ értékét, ahol $T_y = \min\{\,n\,:\,X_n = y\,\}$, ha $X_0 = x$, ahol $0 \le x \le N$.