

## Midterm Exam - September 29, 2017, Stochastic Processes

Family name \_\_\_\_\_ Given name \_\_\_\_\_

Signature \_\_\_\_\_ Neptun Code \_\_\_\_\_

No calculators or electronic devices are allowed. One formula sheet with 15 formulas is allowed.

### In English:

- University students sit in a row on a test exam. The leftmost student knows the correct answer to a yes/no question. The others have no clue, so they try to copy the solution of the student sitting on their left. With probability  $3/4$ , each student succeeds in copying the answer written by the student on his left, but with probability  $1/4$  they write exactly the opposite answer as the student on their left. First the leftmost student writes her answer down, then the second student, then the third one, etc.
  - Can you model this process with a Markov chain? Write down the state space and the transition matrix.
  - What is the probability that the third student gives the correct answer?
  - What is the probability that the tenth student gives the correct answer?
- There are three chairs in a barbershop, including the one that the barber uses to cut the hair of clients. The other two chairs are used by clients waiting for their hair to be cut. While he cuts the hair of a client, three things can happen: zero, one or two new clients can possibly arrive, with probabilities  $1/2$ ,  $1/3$  and  $1/6$ , respectively. If there is no vacant chair then possible new clients walk away immediately without sitting down.
  - Let  $X_n$  denote the number of clients waiting when the  $n$ 'th haircut is finished. Can you model this process with a Markov chain? Write down the state space and the transition matrix.
  - The barber just finished cutting the hair of a client and there are two further clients waiting for a haircut. It takes twenty minutes for the barber to cut the hair of a client. What is the expected time (in minutes) until the barber can take a break?

### Magyarul:

- Egyetemi hallgatók ülnek egy sorban egy igen/nem típusú feleletválasztós vizsgán. A bal szélső hallgató tudja a helyes választ az egyik kérdésre. A többieknek fogalmuk sincs, így a tőlük balra ülő hallgató megoldását próbálják lemásolni. Minden másolós hallgatónak  $3/4$  valószínűséggel sikerül lemásolnia a tőle balra ülő hallgató által írt választ, de  $1/4$  valószínűséggel pont az ellenkező dolgot írja válasznak, mint a tőle balra ülő. Először a bal szélső hallgató írja le a választát, aztán a második, aztán a harmadik, stb.
  - Tudjuk-e modellezni ezt a folyamatot Markov láncsal? Írja le az állapotteret és az átmenet-mátrixot.
  - Mekkora valószínűséggel ad a harmadik hallgató helyes választ az igen/nem kérdésre?
  - Mekkora valószínűséggel ad a tizedik hallgató helyes választ az igen/nem kérdésre?
- Egy fodrászüzletben három szék van, beleértve azt a széket is, amiben az a kuncsaft ül, akinek a haját épp vágja a fodrász. A másik két székben azok a kuncsaftok ülnek, akik arra várnak, hogy a hajukat levágják. Amíg a fodrász levágja egy kuncsaft haját, háromféle dolog történhet: nulla, egy vagy két új kuncsaft jöhet, rendre  $1/2$ ,  $1/3$  és  $1/6$  valószínűséggel. Ha nincs szabad szék, akkor az újonnan érkező kuncsaftok azonnal tovább is állnak.
  - Jelölje  $X_n$  a várakozó kuncsaftok számát akkor, amikor az  $n$ -edik hajvágás befejeződik. Tudjuk-e modellezni ezt a folyamatot Markov láncsal? Írja le az állapotteret és az átmenet-mátrixot.
  - A fodrász épp befejezett egy hajvágást, és két másik kuncsaft vár arra, hogy sorra kerüljön. A fodrásznak húsz percbe telik egy hajvágás. Várhatóan hány perc múlva tarthat egy szünetet?