

Midterm Exam - October 27, 2017, Stochastic Processes

Family name \_\_\_\_\_ Given name \_\_\_\_\_

Signature \_\_\_\_\_ Neptun Code \_\_\_\_\_

No calculators or electronic devices are allowed. One formula sheet with 15 formulas is allowed.

**In English:**

- On the morning of the  $n$ 'th workday  $Y_n$  faulty cars arrive to the garage of an auto mechanic, where  $Y_1, Y_2, \dots$  are i.i.d. with  $\mathbb{P}(Y_i = 0) = \frac{2}{5}$ ,  $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{1}{3}$ ,  $\mathbb{P}(Y_i = 2) = \frac{4}{15}$ . He can repair one car per day.
  - What is the average number of evenings per year when there are no cars waiting to be repaired in his garage?
  - Yesterday evening there were no cars waiting to be repaired in his garage. What is the expected number of workdays until the next evening without any car to be repaired?
  - If there are at least two cars in his garage in the evening then he becomes worried about work overload. Yesterday evening there were no cars waiting to be repaired in his garage. What is the expected number of worried evenings until the next evening without any car in the garage?
- Find  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\underline{P}}^n$ , where

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Magyarul:**

- Az  $n$ -edik munkanap reggelén  $Y_n$  javítandó autó érkezik egy autószerelő műhelyébe, ahol  $Y_1, Y_2, \dots$  f.a.e. és  $\mathbb{P}(Y_i = 0) = \frac{2}{5}$ ,  $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{1}{3}$ ,  $\mathbb{P}(Y_i = 2) = \frac{4}{15}$ . Naponta egy autót tud megjavítani.
  - Évente átlagosan hány olyan este van, amikor nincs a műhelyében javítandó autó?
  - Tegnap este nem volt javítandó autó a műhelyben. Várhatóan hány munkanapot kell várni a következő olyan estére, amikor nincs javítandó autó?
  - Ha egy este legalább két autó van a műhelyében, akkor aznap este aggódni fog a túlterheltség miatt. Tegnap este nem volt javítandó autó a műhelyben. Várhatóan hány este fog aggódni a következő olyan este előtt, amikor üres a műhely?
- Határozza meg  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\underline{P}}^n$  értékét, ahol

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$