

Midterm Exam - December 6, 2017, Stochastic Processes

Family name _____ Given name _____

Signature _____ Neptun Code _____

No calculators or electronic devices are allowed. One formula sheet with 15 formulas is allowed.

In English:

1. There are six balls in two boxes. Three balls are red, three are blue. In one round I randomly pick a ball from the left box and another ball from the right box and I interchange the two balls.
 - (a) I repeat this procedure for a long time and then look at the boxes. What is the probability that there are two red balls in the left box?
 - (b) Currently there are no red balls in the left box. What is the expected number of rounds until I see zero red balls in the left box again?
 - (c) Currently there are no red balls in the left box. I keep interchanging balls until I find zero red balls in the left box again. In this time interval, what is the expected number of rounds when there are three red balls in the left box?
2. We model the spread of an infectious disease as follows. A contaminated person infects X other people before he/she recovers, where

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}.$$

Initially there is one infected person.

- (a) Write down the generating function of the number of people that caught the disease from the initial person.
- (b) Write down the generating function of the number of people that caught the disease from a person that the initial person infected.
- (c) Calculate the probability of a world-wide epidemic outbreak.

Magyarul:

1. Hat golyó van két dobozban. Három golyó piros, három kék. Egy fordulóban véletlenszerűen választok egy golyót a bal oldali dobozból és egy másikat a jobb oldali dobozból, és kicserélem őket.
 - (a) Ezt a procedúrát sokáig folytatom, majd ránézek a dobozokra. Mi a valószínűsége annak, hogy kettő piros golyót látok a bal oldali dobozban?
 - (b) Most nincs piros golyó a bal oldali dobozban. Várhatóan hány forduló múlva lesz újra nulla piros golyó a bal oldali dobozban?
 - (c) Most nincs piros golyó a bal oldali dobozban. Addig cserélgetem a golyókat, amíg újra nem lesz piros golyó a bal oldali dobozban. Ebben az időintervallumban várhatóan hány olyan forduló volt, amikor három piros golyó volt a bal oldali dobozban?
2. Egy fertőző betegség terjedését modellezzük. Egy fertőzött személy X másik személyt fertőz meg, mielőtt meggyógyul, ahol

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}.$$

Kezdetben egy fertőzött személy van.

- (a) Írja le azon személyek számának generátorfüggvényét, akik a kezdeti személytől kapták el a fertőzést.
- (b) Írja le azon személyek számának generátorfüggvényét, akik egy, a kezdeti személy által megfertőzött személytől kapták el a fertőzést.
- (c) Számítsa ki a világméretű járvány kitörésének valószínűségét.