NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2024. dec. 10.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli számológép használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon.
Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. (a) *(3 pont)* Definiálja az A esemény feltételes valószínűségét a B esemény feltevése mellett.
(b) *(5 pont)* Legyenek $E_1, \ldots, E_n$ tetszőleges események. Írjon fel összefüggést a $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n E_i)$ és a $\mathbb{P}(E_1), \mathbb{P}(E_2 \,|\, E_1), \ldots, \mathbb{P}(E_n \,|\, E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1})$ valószínűségek közt, és bizonyítsa ezt az összefüggést.
(c) *(8 pont)* Használja az előző részfeladat eredményét a következő valószínűség kiszámolására:
A francia kártya pakli 52 lapos és 4 ász van benne. Egy bridzs leosztásnál négy játékos mindegyike fejenként 13 lapot kap. Mekkora a valószínűsége annak, hogy mind a négy játékos egy-egy ászt kap?
Instrukció: azt is definiálja, hogy a (c) feladat megoldásánál mik voltak a (b) feladat jelölésével az E_1, E_2, E_3, E_4 események.

Elm. 2. (a) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a Markov egyenlőtlenséget.
(b) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a Csebisev-egyenlőtlenséget.
(c) *(5 pont)* Legyenek $U_1, \ldots, U_6$ egymástól független, $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Jelölje Y az összegüket. A Csebisev egyenlőtlenség segítségével becsülje felülről a annak a valószínűségét, hogy Y legalább 2-vel eltér 3-tól. *Segítség:* $\mathrm{Var}(U_i) = \frac{1}{12}$.

Elm. 3. (a) *(3 pont)* Definiálja a Poisson eloszlást,
(b) *(3 pont)* Számítsa ki a Poisson eloszlás momentumgeneráló függvényét,
(c) *(3 pont)* lássa be, hogy ha X Poisson eloszlású, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$,
(d) *(4 pont)* számolja ki X várható értékét,
(e) *(4 pont)* számolja ki X szórásnégyzetét.

Bónusz: *(10 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a független Poisson-ok összegének eloszlására vonatkozó tételt.

Gyak. 1. Az angyalkák négyféle csokit tettek az adventi naptáramba (fehér, tej, ét, nugát), mindegyik fajtából hat darabot, minden napra egyet december 1-től 24-ig.
(a) *(8 pont)* Számolja ki annak valószínűségét, hogy december 10-ig kinyitott kalendárium-ajtócskák mögött találok mind a négy féle csokit.
(b) *(9 pont)* Számolja ki a december 10-ig talált étcsokik és nugát csokik számának kovarianciáját.

Gyak. 2. *(16 pont)* Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlással egy szabályos háromszög belsejében, mely háromszögnek minden oldala egységnyi hosszúságú. Jelölje D ennek a pontnak a távolságát a háromszög legközelebbi oldalától. Határozzuk meg a D valószínűségi változó F eloszlás- és f sűrűségfüggvényét. Rajzoljuk le az $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eloszlásfüggvény grafikonját.

Gyak. 3. Egy tárgy vizsgáján a diákok pontszámának várható értéke 74, szórása 14. A vizsgákon részt vevő diákok pontszámai egymástól függetlenek. Az első vizsgát 36-an, a másodikat 49-en írják meg. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy
(a) *(9 pont)* a két vizsga átlagpontszáma legalább 2 pontnyival tér el egymástól,
(b) *(8 pont)* a második vizsga átlagpontszáma közelebb van 74-hez, mint az elsőé.

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000