NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2025. jan. 14.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli számológép használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon.

Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. Legyenek (X, Y) együttesen abszolút folytonos valószínűségi változók $f(x, y)$ együttes sű.fv.-el.

(a) *(1+1+1 pont)* Definiálja formulával az $f_X(x)$ marginális sűrűségfüggvényt, az $f_{Y|X}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvényt, továbbá az $\mathbb{E}(Y|X = x)$ feltételes várható értéket.

(b) *(1+4 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a feltételes várható érték toronyszabályát!

(c) *(2 pont)* Mondja ki a feltételes szórásnégyzet formulát $(\mathrm{Var}(Y) = \dots)$!

(d) *(3+4 pont)* Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, valamint rögzített $X = x$ feltétel mellett legyen Y eloszlása $\mathrm{UNI}[0, x]$. Számolja ki Y várható értékét és szórásnégyzetét! *Súgás*: $\mathrm{UNI}[0, x]$ szórásnégyzete $x^2/12$.

Elm. 2. (a) *(3+2+2 pont)* Legyenek $(X_1, \dots, X_n)$ általános n-dimenziós együttesen normális eloszlású valószínűségi változók. Írja fel $(X_1, \dots, X_n)$ együttes sűrűségfüggvényét (annak magyarázatával együtt, hogy a formulában előforduló tagok hány dimenziós vektorok vagy mátrixok), kovariancia-márixát, és írjon fel összefüggést a sűrűségfüggvényben előforduló mátrix és a kovariancia-mátrix közt.

(b) *(5 pont)* Legyen (X, Y) együttes normális eloszlású, melyre $Cov(X, Y) = 0$ teljesül. Bizonyítsa be, hogy X és Y függetlenek!

(c) *(5 pont)* Mutasson olyan (X, Y) val. változó-párt, amelyek nem függetlenek, de $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Elm. 3. (a) *(2+1+4 pont)* Definiálja a p paraméterű (optimista) geometriai eloszlást (szemléletes jelentése által is és formulával is), és számítsa ki a várható értékét!

(b) *(2+2 pont)* Definiálja az örökifjú tulajdonságot és bizonyítsa be, hogy a geometriai eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal!

(c) *(5 pont)* Legyenek X és Y független $\mathrm{GEO}(p)$ eloszlású valószínűségi változók. Számítsa ki a $\mathbb{P}(X = 6 \,|\, X + Y = 15)$ feltételes valószínűséget.

Gyak. 1. Az ünnepek utáni leárazáson Thomas vett 1000 égőt, mert akciós volt. Az égők élettartama exponenciális eloszlású, 3 hónap várható értékkel. Ha kiég egy égő, akkor Thomas (vagy a leszármazottai) azonnal kicserélik egy újra.

(a) *(3 pont)* Mi az első évben történő égő-cserék számának várható értéke és szórásnégyzete?

(b) *(5 pont)* Számítsa ki a második égő-csere időpontjának eloszlásfüggvényét.

(c) *(9 pont)* Közelítse azt a (legnagyobb) T számot, amire igaz, hogy az égő-készlet 90% valószínűséggel T évig kitart. (Standard normális eloszlás táblázat a hátoldalon.)

Gyak. 2. Határozzuk meg X és Y sűrűségfüggvényét, ha

(a) *(8 pont)* ξ egyenletes eloszlású a $[-3, 2]$ intervallumban, és $X = \xi^2$,

(b) *(8 pont)* ϑ eloszlása $\mathrm{EXP}(\lambda)$, és $Y = \sqrt{\vartheta}$!

Bónusz *(10 pont)* Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda_1)$ és $Y \sim \mathrm{EXP}(\lambda_2)$ két független valószínűségi változó. Számolja ki $Z = X + Y$ sűrűségfüggvényét!

Gyak. 3. Legyenek X és Y független normális eloszlású val. változók. X várható értéke 0, szórásnégyzete 4, Y várható értéke 0, szórásnégyzete 9. Számolja ki a $\mathbb{P}\left((X, Y) \in H \right)$ valószínűséget, ha

(a) *(8 pont)* $H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \le -y,\ -1 \le y \le 1,\ x \ge -3 \}$,

(b) *(9 pont)* $H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (\frac{x}{4})^2 + (\frac{y}{6})^2 \le 2 \}$!

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000