NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2025. jan. 7.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli számológép használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon.

Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. (a) *(3 pont)* Definiálja, hogy mikor függetlenek az A és B események. (b) *(4 pont)* Bizonyítsa be, hogy ha A és B függetlenek, akkor A és B^c is függetlenek. (c) *(3 pont)* Definiálja, hogy mikor feltételesen függetlenek az A és B események a C esemény feltevése mellett. (d) *(6 pont)* Bizonyítsa be, hogy ha A és B események feltételesen függetlenek a C feltevése mellett, akkor $\mathbb{P}(A \mid B \cap C) = \mathbb{P}(A \mid C)$.

Elm. 2. *(8+8 pont)* Írja le a Bertrand féle paradoxont, azaz az órán tanult módon mutasson legalább két különböző módszert arra, ahogy egy kör egy „egyenletes eloszlású véletlen húrját” ki lehet választani, és számolja ki mindkét (vagy mindhárom) esetben annak a valószínűségét, hogy a kapott húr hosszabb, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala. **Bónusz:** *(3 pont)* Ha mindhárom órán tanult módszert leírja és mindhárom esetben kiszámítja a kért valószínűséget.

Elm. 3. (a) *(2+2 pont)* Definiála az X és Y valószínűségi változók kovarianciáját és korrelációját.

(b) *(1+4 pont)* Definiálja a kovariancia-mátrix fogalmát és lássa be, hogy a kovariancia-mátrix pozitív szemidefinit.

(c) *(4 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget.

(d) *(5 pont)* Bizonyítsa be, hogy ha X és Y korrelációja 1, akkor $Y = a \cdot X + b$, ahol $a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}$.

Gyak. 1. *(16 pont)* András, Béla és Csaba ultiznak: ebben a játékban a 32 lapos magyar kártyából 10 lapot osztanak mindhárom játékosnak, a fennmaradó két lap a talonba kerül. Minden leosztást egyformán valószínűnek feltételezve, mi az esélye, hogy Andráshoz a nyolc figura egyikéből sem kerül mind a négy szín? (Azaz: Andrásnak nincs se négy hetese, se négy nyolcasa... se négy ásza)?

Gyak. 2. A mentők és a tűzoltók területi ügyeleti beosztása nem egyforma. Kukutyin (800 lakos) és Piripócs (1200 lakos) tartozik a KP mentős körzetbe, Szecső (900 lakos) és Pajkaszeg (1300 lakos) pedig a SzP mentős körzetbe. Kukutyin és Szecső tartozik a KSz tűzoltósági riasztási körzetbe, Piripócs és Pajkaszeg pedig a PP tűzoltósági riasztási körzetbe. Szilveszterkor minden lakos a többitől függetlenül 0.001 valószínűséggel esik petárda-baleset áldozatául. A petárda-balesetekhez a mentőket és a tűzoltókat is kihívják. *Instrukció:* az alábbi feladatok megoldásához használjon Poisson-közelítést.

(a) *(5 pont)* Mekkora valószínűséggel kap a PP tűzoltóság legalább két riasztást?

(b) *(6 pont)* Feltéve, hogy a KP mentős körzet pontosan három hívást kapott, mennyi annak a valószínűsége, hogy Piripócson pontosan két petárda-baleset volt?

(c) *(6 pont)* Jelölje X a PP tűzoltóság riasztásainak számát, Y pedig a KP mentős övezet risztásainak számát. $\mathrm{Cov(X, Y)} = ?$

Bónusz: *(3+4 pont)* Számolja ki a $\mathbb{E}(X \mid Y)$ feltételes várható értéket és a $\mathrm{Var}(X \mid Y)$ feltételes szórásnégyzetet!

Gyak. 3. *(17 pont)* Egy részecske töltését két kutatócsoport is szeretné kimérni, az első csoport 5 mérést végez és átlagolja ezek eredményét, a második csoport 7 mérést végez és szintén átlagol. Az egyes mérések független azonos normális eloszlásúak, a várható érték a részecske tényleges μ töltése, a szórás σ. Mi a valószínűsége, hogy az első csoport eredménye pontosabb, mint a második csoport eredménye?

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000