NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2024. dec. 17.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli számológép használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon.

Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. (a) *(3 pont)* Mondja ki a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle axiómáit!

(b) *(4 pont)* Mondja ki az n eseményre vonatkozó szita-formulát!

(c) *(3 pont)* Bizonyítsa az $n = 2$ eseményre vonatkozó szita-formulát!

(d) *(6 pont)* Készül az 5.a osztály az osztálykarácsonyra. Annak eldöntésére, hogy ki kit ajándékozzon meg, a 29 fős osztály minden tanulója felírja a nevét egy cetlire és bedobják a cetliket egy Mikulás-sapkába. Jól megrázzák, majd mindenki kihúz egy nevet. Mekkora valószínűséggel nem lesz olyan tanuló, aki a saját nevét húzta? *Instrukció:* nem elég a végeredmény, a számolást is írja le!

Elm. 2. (a) *(11 pont)* Írja fel a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét és a megfelelő integrálok formális kiszámolásával vezesse le, hogy tényleg nulla a várható értéke és 1 a szórásnégyzete.

(b) *(6 pont)* Legyen X sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-x^2 + 2x - 1\right)$, és legyen $Y = \sqrt{2}\cdot(1-X)$. Számolja ki Y szórásnégyzetét.

Elm. 3. (a) *(2+2 pont)* Definiála az X és Y valószínűségi változók kovarianciáját és korrelációját.

(b) *(2 pont)* Definiálja az $X_1, \dots, X_n$ valószínűségi változók kovariancia-mátrixát.

(c) *(5 pont)* Lássa be, hogy a kovariancia-mátrix pozitív szemidefinit.

(d) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget.

Bónusz: *(10 pont)* Legyen X egyenletes eloszlású a $[6, 9]$ intervallumon. Az Y valószínűségi változó eloszlását nem árulták el nekünk, de azt tudjuk, hogy Y várható értéke 10 és szórása $\sqrt{3}$, továbbá azt is, hogy $\mathrm{Cov}(X, Y) = 3/2$. Ez alapján mit tudunk mondani a $\mathbb{P}(Y \geq 9)$ valószínűségről?

Gyak. 1. *(8+8 pont)* Egy lepkegyűjtő öt automatikusan kinyíló lepke-csapdát helyezett el a réten, egymástól távol. Mindegyik lepke-csapda a többitől függetlenül $2/3$ valószínűséggel nyílik ki. Ha nem nyílik ki, akkor nem ejt csapdába egy lepkét sem, ám ha kinyílik, akkor minden csapda esetén minden arra repülő lepke kis valószínűséggel (a többitől függetlenül) belerepül a csapdába. Egy sikeresen kinyílt csapdába két lepke foglyul ejtése közt várhatóan 20 perc telik el. Egy órán át vannak nyitva a csapdák, utána összeszedi őket. Mi a csapdába esett lepkék számának várható értéke és szórásnégyzete?

Gyak. 2. *(17 pont)* Egy téglalap oldalainak hossza legyen 4 ill 3. A két szemközti 4 hosszú oldalon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk egy-egy véletlen pontot. Jelölje X e pontok távolságát. Meghatározandó X eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye. Vázolja fel az eloszlásfüggvény grafikonját!

Gyak. 3. A Mikulás hajtja a rénszarvas-meghajtású repülő szánt, miközben a kis Jézus a hátsó ülésről dobálja le az ajándékokat a családi házak kéményein keresztül. Minden alkalommal a kémény-nyílás közepét célozza (amiről feltehetjük, hogy a kétdimenziós koordináta-rendszer origója), de az a pont, ahol az ajándék landol, kétdimenziós normális eloszlású, melynek várható érték-vektora $(0, 0)$ és a kovariancia-mátrixa a kétdimenziós identitás-mátrix 3-szorosa. Mekkora valószínűséggel talál bele a kémény-nyílásba, ha

(a) *(8 pont)* a kémény-nyílás négyzet alakú, melynek csúcsai $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$?

(b) *(9 pont)* a kémény-nyílás egy origó középpontú $3/2$ sugarú kör?

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000