Valószínűségszámítás 1, 1. ZH
2025
B csoport

① $B = \{\text{Bal lábbal kel fel}\}$ $P(B) = 0{,}2$

$Z = B^c$ $P(Z) = 0{,}8$

$A_i = \{\text{Az } i. \text{ diák megbukik}\}$

$P(A_i \mid B) = 0{,}2$

$P(A_i \mid Z) = 0{,}1$

$$? = P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} = \quad \text{(teljes valószínűség tétele)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \mid B)P(B) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \mid Z)P(Z)}{P(A_1 \cap A_2 \mid B)P(B) + P(A_1 \cap A_2 \mid Z)P(Z)} = \frac{0{,}2^3 \cdot 0{,}2 + 0{,}1^3 \cdot 0{,}8}{0{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1^2 \cdot 0{,}8} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

CamScanner

② $X_\alpha := \{\alpha$ típusú magok száma egy $\underbrace{\text{tábla}}_{100g}$ csokiban$\} \sim Poi(\lambda)$ független

$\alpha \in \{mo, p, k, ma\} =: I$

a) $X := X_{mo} + X_p + X_k + X_{ma} \sim Poi(4\lambda)$

$$\frac{15}{16} \leq \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = 1 - e^{-4\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda \geq \ln 2$$

$Y_p = \{$pisztáciák száma 1kg csokiban$\} \sim Poi(10\lambda)$

$10\lambda \geq 10 \ln 2 \sim 6{,}93$

$\Rightarrow$ Átlagosan legalább 7 db pisztácia kell egy kiló csokiba.

$\lambda = \frac{1}{2}$ inhentől

b) $A_\alpha := \{$Az α típusú magy mind az 5 csokiban megtalálható$\}$

$$\mathbb{P}(A_\alpha) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(X_\alpha \geq 1)^5 = (1 - \mathbb{P}(X_\alpha = 0))^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{01}{32}$$

különböző táblákban független az eloszlás

Kérdés: $? = \mathbb{P}(A_{mo} \cup A_p \cup A_k \cup A_{ma}) = 1 - \mathbb{P}(A_{mo}^c \cap A_p^c \cap A_k^c \cap A_{ma}^c) \overset{\text{függetlenek}}{=}$

$$= 1 - \prod_\alpha \mathbb{P}(A_\alpha^c) = 1 - \prod_\alpha (1 - \mathbb{P}(A_\alpha)) = 1 - \left(\frac{31}{32}\right)^4 \approx 0{,}1193$$

$\boxed{\text{VAGY szitával}}$

$$\mathbb{P}(A_{mo} \cup A_p \cup A_k \cup A_{ma}) \underset{\text{függetlenek}}{=} \ldots = 4 \cdot \mathbb{P}(A_p) + \binom{4}{2} \mathbb{P}(A_p)^2 + \binom{4}{3} \mathbb{P}(A_p)^3 + \mathbb{P}(A_p)^4 \approx 0{,}1193$$

CamScanner

Bónusz $G_\alpha = \{$hányadik csokiban van az első α típusú mag$\} \sim Geo\left(\frac{1}{2}\right)$

[Emlékeztető: Bármely $X_1, \dots, X_n$ valváltozókra

$$X_1 \vee \dots \vee X_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} (-1)^{k+1} X_{i_1} \wedge X_{i_2} \wedge \dots \wedge X_{i_k}$$ mint a szita

Ahol $X_1 \vee X_2 = \max\{X_1, X_2\}$, $X_1 \wedge X_2 = \min\{X_1, X_2\}$

Valamint $X_1 \sim Geo(p)$, $X_2 \sim Geo(q)$ független $\Rightarrow X_1 \wedge X_2 \sim Geo(1-(1-p)(1-q))$]

$$? = \mathbb{E}(G_{mo} \vee G_p \vee G_k \vee G_{ma})$$

$G_p \sim Geo\left(\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $G_p \wedge G_k \wedge G_{mo} \sim Geo\left(\frac{7}{8}\right)$

$G_p \wedge G_k \sim Geo\left(\frac{3}{4}\right)$ $\qquad$ $G_p \wedge G_k \wedge G_{mo} \wedge G_{ma} \sim Geo\left(\frac{15}{16}\right)$

$$\mathbb{E}\left(\bigvee_{\alpha \in I} G_\alpha\right) = \binom{4}{1} 2 - \binom{4}{2} \frac{4}{3} + \binom{4}{3} \frac{8}{7} + (-1) \frac{16}{15} =$$

$$= \frac{32}{7} - \frac{16}{15} = \frac{368}{105} \approx 3{,}505$$

$\Rightarrow$ Várhatóan 4 tábla csokit kell vásárolnia

CamScanner