Valószínűségszámítás 1. 2. ZH

2025

(B)

(1)

$X = \{\text{hány füzet kell}\} \sim Bin(10000, p)$

$p = P(\text{egy adott emberhez elmegy és nem füzetet}) = 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}36$

T = füzetek száma $\quad (E(X) = 3600, \quad V(X) = 10000\,p(1-p) = 48^2)$

$$0{,}01 > P(X > T) = P\left(\frac{X-3600}{48} > \frac{T-3600}{48}\right) \overset{\text{diff.}}{=}$$

$$= P\left(\underset{\uparrow N(0,1)}{Z} > \frac{T-3600}{48}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{T-3600}{48}\right)$$

$$0{,}99 < \Phi\left(\frac{T-3600}{48}\right)$$

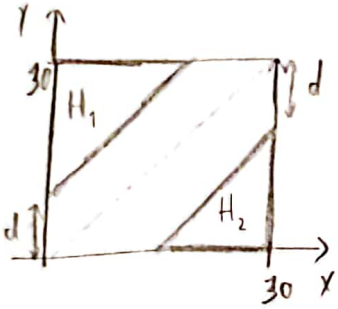
$$2{,}33 < \frac{T-3600}{48} \quad \Rightarrow T > 3711{,}84$$

Legalább 3712 füzet kell.

(2) $X, Y \sim Uni(0,30)$ függetlenek

a) $K = |Y - X|$ eloszlásfüggvénye = ?

$(X,Y) \sim Uni([0,1]^2)$



$$\mathbb{P}(K \geq d) = \mathbb{P}((X,Y) \in H_1 \cup H_2) = \frac{2 \cdot \frac{(30-d)^2}{2}}{30^2} = \left(1 - \frac{d}{30}\right)^2$$

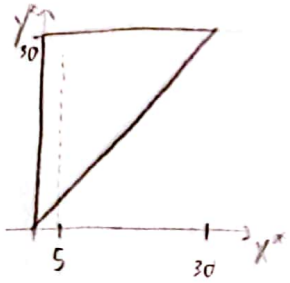
$d \in [0,30]$

$$F_K(d) = \mathbb{P}(K < d) = 1 - \left(1 - \frac{d}{30}\right)^2 = \frac{d}{15} - \frac{d^2}{30^2} \quad \forall d \in [0,30]$$

$F(d) = 1 \ \forall d > 30$, $F(d) = 0 \ \forall d < 0$

b) Tudjuk, hogy ha $X^* = X \wedge Y$, $Y^* = X \vee Y$, akkor

$(X^*, Y^*) \sim Uni(\nabla)$



Háromszög egyenlőtlenségek:

$X^* \leq Y^* - X^* + 30 - Y^* \Rightarrow X^* \leq 15$

$Y^* - X^* \leq X^* + 30 - Y^* \Rightarrow Y^* \leq \frac{30 + 2X^*}{2}$

$30 - Y^* \leq X^* + Y^* - X^* \Rightarrow Y^* \geq 15$

$$\mathbb{P}(\text{lehet háromszög} \mid X^* = 5) = \mathbb{P}(Y^* \in [15,20] \mid X^* = 5) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

CamScanner

(3) 5 fülke, 6-6 ülés; 9 fős társaság

Egy ember magányos, ha egyedül ül egy fülkében.

η = {magányos emberek száma}

I. verzió:

$A_i := \{$ i. ember magányos$\}$ $\quad i \in \{1, \dots, 9\}$

$\eta_i := \mathbb{1}_{A_i} \rightarrow \mathbb{E}(\eta_i) = \mathbb{P}(A_i) = \frac{\binom{21}{8}}{\binom{29}{8}} = 0{,}171$

← májik fülkébe ülnek a többiek

← bárhova kerülhetnek a többiek (kivéve i. helyére)

$$\mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}\left(\sum_i \eta_i\right) = \sum_{i=1}^{9} \mathbb{E}(\eta_i) = 9 \cdot \frac{\binom{21}{8}}{\binom{29}{8}} = 1{,}54$$

II. verzió

$A_i = \{$ i. fülkében magányosan utaznak$\}$ $\quad i \in \{1, \dots, 5\}$

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{6 \cdot \binom{24}{8}}{\binom{30}{9}}$$

← a magányos ember az i. fülke melyik helyére üljön

← többi ember májfülkébe ül

← véletlen ültetés

$\mathbb{P}(A_i) = 0{,}308$

$$\mathbb{E}(\eta) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{E}(\eta_i) = 5 \cdot \mathbb{P}(A_i) = 1{,}54$$

Példa: 5 német, 4 francia

Egy utas néma, ha nincs konfitárja a fülében

$\eta := \{$néma németek száma$\}$

$\nu := \{$néma franciák száma$\}$ $\Rightarrow$ függetlenek

$\xi := \{$néma utasok száma$\} = \eta + \nu$

A ③ feladat I. verziója alapján

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) + \mathbb{E}(\nu) = 5 \cdot \frac{\binom{29}{4}}{\binom{29}{4}} + 4 \cdot \frac{\binom{24}{3}}{\binom{29}{3}} = 2{,}236 + 2{,}216 = 4{,}45$$

$$\mathbb{V}(\xi) = \mathbb{V}(\eta) + \mathbb{V}(\nu)$$

$$\mathbb{V}(\eta) = \mathrm{Cov}(\eta, \eta) = \sum_{i,j=1}^{5} \mathrm{Cov}(\eta_i, \eta_j) = 5 \cdot \mathrm{Cov}(\eta_1, \eta_1) + 5 \cdot 4 \cdot \mathrm{Cov}(\eta_1, \eta_2) =$$

$$= 5 \cdot \mathbb{P}(A_1)(1 - \mathbb{P}(A_1)) + 5 \cdot 4 \left(\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \right) =$$

$$= 5 \cdot \frac{\binom{24}{4}}{\binom{29}{4}} \left(1 - \frac{\binom{24}{4}}{\binom{29}{4}} \right) + 5 \cdot 4 \left(\frac{24 \cdot \binom{18}{3}}{\binom{29}{4}} - \frac{\binom{24}{4}^2}{\binom{29}{4}^2} \right) =$$

ha ül a második — a többiek a maradék fülekbe ülnek

$$= 5 \cdot 0{,}247 + 5 \cdot 4 \cdot 0{,}625 = 13{,}74$$