Felsőbb matematika ZH, 2010. december 10.

Összesen 10 pont szerezhető. 4 ponttól sikeres (elégséges) a zh, 5.5-től közepes, 6.5-től jó, 8-tól jeles.

Elméleti kérdések (nem használható segédeszköz):

1. (1 pont) Adjuk meg az elsőrendű derivált haladó differencia és a másodrendű derivált központi differencia közelítését! Mekkora ezen közelítések rendje? Mit jelent a rend ebben az esetben?

2. (1 pont) Adjuk meg az $u(x,t)$ ismeretlen függvényre felírt másodrendű, lineáris inhomogén parciális differenciálegyenlet általános alakját. Mikor hívunk egy ilyen egyenletet parabolikusnak? Adjunk meg egy példát parabolikus egyenletre! Milyen feltételeket kell még megadnunk ahhoz, hogy egy parabolikus egyenletnek egyértelmű megoldása legyen?

3. (1 pont) Adjuk meg az

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, \mathrm{d}x$$

funkcionál első és második variációjának definícióját! Írjuk fel az első variáció alakját!

Feladatok (írott segédeszköz használható):

4. (1.5 pont) Hány megoldása van az $f(x) = e^x + x - 2 = 0$ egyenletnek? Határozzuk meg a zérushelyeket a Newton-módszer segítségével (végezzünk el 4 iterációs lépést, számoljunk a lehető legpontosabban a számológépen)!

5. (1.5 pont) Az $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ függvény lokális minimumát keressük a gradiens módszer segítségével az $(1/2, 1/2)$ pontból indulva. Végezzünk el egy lépést az iterációval! Az egyenesmenti keresésben az Armijo-szabályban alkalmazzuk az $\alpha = 10^{-4}$ és $\gamma = 0.8$ paramétereket!

6. (1.5 pont) Egy egységnyi hosszúságú vékony rúd hőmérséklete a $t = 0$ időpontban minden végponttól különböző pontban 1. Tegyük fel, hogy a rúd bal szélét állandóan konstans nulla fokon tartjuk, a jobb szélét pedig konstans 1 fokon. Adjunk közelítést a hőmérsékletre a $t = 0.03$ időpontban a rúd bal szélétől 0.4 egység távolságban! Használjuk a tanult véges differencia módszert $\Delta x = 0.2$, $\Delta t = 0.01$ választással. (A rúd anyagi paraméterei 1-nek vehetők.)

7. (1 pont) Keressük meg a $\Delta u = 0$ egyenlet megoldását az egységkörlapon ($x^2 + y^2 \leq 1$) az $u(x,y) = x$ ($x^2 + y^2 = 1$) peremfeltétel mellett $u_H = u_H(r,\theta)$ alakban! Igazoljuk, hogy az $u_I(r,\theta) = (r^2 - 1)/4$ függvény megoldása a $\Delta u = 1$, $u(x,y) = 0$ ($x^2 + y^2 = 1$) peremértékfeladatnak! Hogyan állítható elő a $\Delta u = 1$, $u(x,y) = x$ ($x^2 + y^2 = 1$) peremértékfeladat megoldása ezek után?

8. (1.5 pont) Adjuk meg az

$$I(y) = \int_{-1}^{0} ((y'(x))^2 - 12xy)\, \mathrm{d}x, \; y(-1) = 1, \; y(0) = 0$$

funkcionál lokális minimumhelyét! Azt is ellenőrizzük le, hogy tényleg minimum van az adott pontban!