Felsőbb matematika ZH, 2011. december 1.

Összesen 20 pont szerezhető. 8 ponttól sikeres (elégséges) a zh, 11-től közepes, 13-tól jó, 16-tól jeles.

Elméleti kérdések (nem használható segédeszköz):

1. (2 pont) Ismertessük az intervallumfelezési módszert, és adjuk meg tulajdonságait!

2. (2 pont) Tegyük fel, hogy egy kvadratikus célfüggvényt szeretnénk minimalizálni. Mi a lényeges különbség a gradiens és konjugált gradiens módszerek között? konjugált gradiens módszernél mikor hívunk két keresési irányt A-konjugáltnak?

3. (2 pont) Írjuk le az egydimenziós hővezetési egyenletre vonatkozó kezdeti- és peremértékfeladatot! Milyen peremfeltételeket szokás alkalmazni? Hogy hívják ezeket?

Feladatok (írott segédeszköz használható):

4. (3 pont) Határozzuk meg az $x = \cos x$ egyenlet $[0, \pi/2]$ intervallumba eső megoldását a Newton-módszer segítségével (végezzünk el 4 iterációs lépést, számoljunk a lehető legpontosabban a számológépen)!

5. (3 pont) Az $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4x - 8y$ kvadratikus függvény lokális (ami egyben abszolút minimum is) minimumát keressük a gradiens módszer segítségével az $(1, 0)$ pontból indulva. Végezzünk el két lépést az iterációval!

6. (4 pont) Tekintsük az alábbi feladatot

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x} &= 0,\ \ x \in (0, 1), \\
u(x, 0) &= (-9x^2 + 9x)/2, \\
u(0, t) &= u(1, t),\ \ t \geq 0.
\end{aligned}$$

Mekkora lehet maximálisan $h = 1/3$-os rácstávolság esetén a τ időlépés, ha a Lax-Friedrichs-módszert használjuk a feladat numerikus megoldására? Határozzuk meg a numerikus megoldást az első időrétegen!

7. (4 pont) Adjuk meg a

$$2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 5t,$$

$u(x, 0) = \phi(x)$ kezdetiérték-feladat megoldását a karakterisztikus görbék módszerével!