Interpoláció és görbeillesztés 1.

Interpoláció

Tegyük fel, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek ismerjük $n+1$ pontban az értékeit, legyenek ezek az (x_i, f_i) $(i = 1 \dots n+1)$ pontpárok. Célunk egy olyan $g(x)$ görbe illesztése ezen pontpárokra, melyre teljesül, hogy

$$g(x_i) = f_i, \ i = 1, \dots, n+1 \tag{1}$$

esetén. Ezt nevezzük interpolációs feladatnak.

Lagrange és Newton–féle interpoláció

Tegyük fel, hogy a $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$ feltétel teljesül az alappontokra. Ekkor minden rögzített $n+1$ darab ponthoz pontosan egy olyan legfeljebb n-edfokú L_n polinom létezik, melyre $L_n(x_i) = f_i$ $i = 1, \dots n+1$. Ez a polinom felírható

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i l_i(x) \tag{2}$$

alakban, ahol

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \tag{3}$$

ez az interpolációs polinom Lagrange–féle alakja.

Az interpolációs polinom Newton–féle alakja

$$N_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f[x_1, \dots, x_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j), \tag{4}$$

ahol

$$f[x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=1}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{l=1, l\neq j}^{k} (x_j - x_l)} \tag{5}$$

osztott differencia.

Feladatok

1. Legyenek adott a következő (x_i, f_i) pontpárok. Számoljuk ki az ezekre illeszkedő Lagrange és Newton–féle interpolációs polinomot!

x_i	f_i
-1	-1
0	0
2	8

Megoldás:

a) Az interpolációs polinom Lagrange–féle alakja ekkor

$$l_1(x) = \frac{x-0}{-1-0} \cdot \frac{x-2}{-1-2} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x,$$
$$l_2(x) = \frac{x-(-1)}{0-(-1)} \cdot \frac{x-2}{0-2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1,$$
$$l_3(x) = \frac{x-(-1)}{2-(-1)} \cdot \frac{x-0}{2-0} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

Ezt felhasználva az interpolációs polinom

$$L_2(x) = -1 \cdot l_1(x) + 0 \cdot l_2(x) + 8 \cdot l_3(x) = x^2 + 2x.$$

b) Az interpolációs polinom Newton–féle alakja az alappontok és függvényértékek segítségével készítjük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	$\boxed{-1}$		
0	0	$\frac{0-(-1)}{0-(-1)} = \boxed{1}$	
2	8	$\frac{8-0}{2-0} = 4$	$\frac{4-1}{2-(-1)} = \boxed{1}$

A fenti táblázat bekeretezett értékei segítségével felírható a Newton–féle interpolációs polinom

$$N_2(x) = -1 + 1 \cdot (x-(-1)) + 1 \cdot (x-(-1))(x-0) = x^2 + 2x.$$

c) A polinom együttható meghatározhatóak a `polyfit` függvény segítségével is. Bemenő paraméterként megadjunk az alappontokat egy tömbbe rendezve, azaz

$$\mathtt{v} = [-1\ 0\ 2]. \tag{6}$$

A második bemenő paraméter az alappontbeli függvényértékeke, azaz

$$\mathtt{p} = [-1\ 0\ 8] \tag{7}$$

A második bemenő paraméter az illesztendő polinom fokszáma, azaz most 2, tehát

$$\mathtt{polyfit}(\mathtt{v}, \mathtt{p}, 2). \tag{8}$$

Az eredmény [1 2 0] a kapott másodfokú polinom együtthatói, a másodfokú tagtól kezdve. Vagyis x^2 együtthatója 1, az x tag együtthatója 2, a konstans tag pedig 0.

2. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket egy ábrán!

- $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, ha $x \in [-1, 1]$,
- az f függvényt a $-1, -0.8, -0.6, \ldots, 0.6, 0.8, 1$ egyenlő lépésközű alappontokhoz tartozó Lagrange–polinomját,
- az f függvény $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{22}\pi\right)$, $k = 1, 2, \ldots, 11$ alappontokhoz tartozó Lagrange–polinomját