1. Feladatsor: Interpoláció és görbeillesztés

1. Interpoláció

Tegyük fel, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek ismerjük $n+1$ pontban az értékeit, legyenek ezek az (x_i, f_i) $(i = 1 \dots n+1)$ pontpárok. Célunk egy olyan $g(x)$ görbe illesztése ezen pontpárokra, melyre teljesül, hogy

$$g(x_i) = f_i, \; i = 1, \dots, n+1 \tag{1}$$

esetén. Ezt nevezzük interpolációs feladatnak.

1.1. Lagrange és Newton–féle interpoláció

Tegyük fel, hogy a $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$ feltétel teljesül az alappontokra. Ekkor minden rögzített $n+1$ darab ponthoz pontosan egy olyan legfeljebb n-edfokú L_n polinom létezik, melyre $L_n(x_i) = f_i$ $i = 1, \dots n+1$. Ez a polinom felírható

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i l_i(x) \tag{2}$$

alakban, ahol

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \tag{3}$$

ez az interpolációs polinom Lagrange–féle alakja.

Az interpolációs polinom Newton–féle alakja

$$N_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f[x_1, \dots, x_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j), \tag{4}$$

ahol

$$f[x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=1}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{l=1, l\neq j}^{k} (x_j - x_l)} \tag{5}$$

osztott differencia.

Feladatok

1. Legyenek adott a következő (x_i, f_i) pontpárok. Számoljuk ki az ezekre illeszkedő Lagrange és Newton–féle interpolációs polinomot!

x_i	f_i
-1	-1
0	0
2	8

Megoldás:

a) Az interpolációs polinom Lagrange–féle alakja ekkor

$$l_1(x) = \frac{x-0}{-1-0} \cdot \frac{x-2}{-1-2} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$$
$$l_2(x) = \frac{x-(-1)}{0-(-1)} \cdot \frac{x-2}{0-2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$
$$l_3(x) = \frac{x-(-1)}{2-(-1)} \cdot \frac{x-0}{2-0} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

Ezt felhasználva az interpolációs polinom

$$L_2(x) = -1 \cdot l_1(x) + 0 \cdot l_2(x) + 8 \cdot l_3(x) = x^2 + 2x.$$

b) Az interpolációs polinom Newton–féle alakja az alappontok és függvényértékek segítségével készítjük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	$\boxed{-1}$		
0	0	$\frac{0-(-1)}{0-(-1)} = \boxed{1}$	
2	8	$\frac{8-0}{2-0} = 4$	$\frac{4-1}{2-(-1)} = \boxed{1}$

A fenti táblázat bekeretezett értékei segítségével felírható a Newton–féle interpolációs polinom

$$N_2(x) = -1 + 1 \cdot (x-(-1)) + 1 \cdot (x-(-1))(x-0) = x^2 + 2x.$$

1.2. Hermite–interpoláció

Legyenek adottak az $x_1, \ldots, x_{n+1}$ különböző alappontok és az x_k $(k = 1, \ldots, n+1)$ pontban legyen adott $m_k + 1$ darab számérték: $f_k^{(0)}, \ldots, f_k^{(m_k)}$. Keressünk olyan H polinomot, melyre teljesül a

$$H^{(i)}(x_k) = f_k^{(i)}, \quad (k = 1, \ldots, n+1, i = 0, \ldots, m_k) \tag{6}$$

feltétel. Ezt az eljárást Hermite–féle interpolációnak nevezzük.

Feladat

2. Határozzuk meg az Hermite–féle interpolációs polinomot, ha $f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f'(2) = 3,\ f''(2) = -2,\ f(3) = 1$.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$	$\dots$
1	$\boxed{0}$				
2	1	$\frac{1-0}{2-1} = \boxed{1}$			
2	1	$\frac{3}{1!} = 3$	$\frac{3-1}{2-1} = \boxed{2}$		
2	1	$\frac{3}{1!} = 3$	$\frac{-2}{2!} = -1$	$\frac{-1-2}{2-1} = \boxed{-3}$	
3	1	$\frac{1-1}{3-2} = 0$	$\frac{0-3}{3-2} = -3$	$\frac{-3-(-1)}{3-2} = -2$	$\frac{-2-(-3)}{3-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Megoldás:

A fenti táblázat bekeretezett értékei segítségével felírható a Newton–féle interpolációs polinom

$$H_5(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (x-1)(x-2) + (-3) \cdot (x-1)(x-2)^2 + \frac{1}{2} \cdot (x-1)(x-2)^3.$$

Felhasználtuk továbbá, az $\underbrace{f[x_i, \dots, x_i]}_{k+1 \ darab} = \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$ összefüggést.

3.

1.3. Spline interpoláció

Spline–interpoláció esetén szakaszonként polinomokkal leírt görbét értünk. Egy n–edfokú spline eetén legfeljebb n–edfokú polinomszakaszok csatlakoznak egymáshoz, hogy nemcsak a folytonosságot, hanem az $n-1$-szeri differenciálhatóságot is biztosítják.

Lineáris spline interpoláció

Adott $n+1$ pont esetén n darab szakasz van, ezekre n egyenest Illesztünk. Legegyszerűbben a két pontra alkalmazott Lagrange–féle interpoláció segítségével:

$$S_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{7}$$

Matlabban az `interp1` függvényt használhatjuk általánosan spline interpolációra. Ekkor egy paraméter segítségével megadhatjuk, hogy milyen spline interpolációt alkalmazni. (Alapértelmezett beállítás a lineáris interpoláció.) Egyébként a `'linear'` paraméterrel adható meg a lineáris spline interpoláció.

Feladat

3. A következő táblázat a nitrogén sűrűségét mutatja különböző hőmérsékleten. Adjunk becslést a sűrűségre, ha a hőmérséklet értéke 330 K.

T (K)	200	250	300	350	400	450
Sűrűség (kg/m^3)	1.708	1.367	1.139	1.102	1.022	1.001

```
» x = [200 250 300 350 400 450]
» f = [1.7080 1.3670 1.1390 1.1020 1.0220 1.0010]
» xi = 200:10:450;
» filinear = interp1(x, f, 'linear');
» plot(x, f, 'o', xi, filinear)
```

Négyzetes spline interpoláció

Négyzetes (kvadratikus, másodfokú) spline esetében az alappontok közé másodfokú polinomokat ($S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$) illesztünk úgy, hogy a csatlakozási pontokban a függvény elég sima legyen, az első deriváltak megegyezzenek.

Feladat

4. Írjuk fel azt az $S(x)$ másodfokú splinet, amely illeszkedik a $(-1, 2), (0, 1), (2, -1)$ pontokra és $S'(2) = -2$.

   Megoldás:

   A keresett spline–ról feltesszük, hogy a következő alakú

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \text{ha } x \in [-1, 0] \\ S_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2, \text{ha } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

   Az interpolációs feltételek:

$$\begin{aligned} S_1(-1) = 2 &\to a_1(-1)^2 + b_1(-1) + c_1 = 2 \\ S_1(0) = 1 &\to c_1 = 1 \\ S_2(0) = 1 &\to c_2 = 1 \\ S_2(2) = -1 &\to 4a_2 + 2b_2 + c_2 = -1. \end{aligned}$$

   A peremfeltételből kapjuk

$$S_2'(2) = -2 \to 2a_2 \cdot 2 + b_2 = -2.$$

   A másodfokú spline deriváltjának a 0 belső pontban felírt folytonosságból kapjuk

$$S_1'(0) = S_2'(0) \to b_1 = b_2.$$

   A megoldandó egyenletrendszer tehát

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= 1 \\ 4a_2 + 2b_1 &= -2 \\ 4a_2 + b_1 &= -2. \end{aligned}$$

   Megoldásként kapjuk, hogy $a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ b_1 = 0$. A keresett spline pedig

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = x^2 + 1, \text{ha } x \in [-1, 0] \\ S_2(x) = -\dfrac{1}{2} x^2 + 1, \text{ha } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Köbös spline interpoláció

Köbös spline esetében az alappontok közé harmadfokú polinomokat ($S_i(x) = a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i$) illesztünk úgy, hogy a csatlakozási pontokban a függvény elég sima legyen, azaz az első és második deriváltak megegyezzenek.

Feladat

5. Tekintsük az $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ függvényt és a $-1, 0, 1$ alappontrendszert. Határozzuk meg az f-et interpoláló köbös splinet Hermite–féle peremfeltétellel, azaz $f'(-1) = f'(1) = 0$.

   Megoldás:

   A keresett spline–ról feltesszük, hogy a következő alakú

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, \text{ha } x \in [-1, 0] \\ S_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2, \text{ha } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

   Az interpolációs feltételek

$$\begin{aligned} S_1(-1) = -1 &\to -a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = -1 \\ S_1(0) = 0 &\to d_1 = 0 \\ S_2(0) = 0 &\to d_2 = 0 \\ S_2(1) = 1 &\to a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1. \end{aligned}$$

   A Hermite–féle peremfeltételből kapjuk

$$\begin{aligned} S_1'(-1) = 0 &\to 3a_1 - 2b_1 + c_1 = 0 \\ S_2'(1) = 0 &\to 3a_2 + 2b_2 + c_2 = 0. \end{aligned}$$

   A harmadfokú spline deriváltjainak a 0 belső pontban felírt folytonosságból kapjuk

$$\begin{aligned} S_1'(0) = S_2'(0) &\to c_1 = c_2 \\ S_1''(0) = S_2''(0) &\to b_1 = b_2. \end{aligned}$$

   A megoldandó egyenletrendszer tehát

$$\begin{aligned} -a_1 + b_1 - c_1 &= -1 \\ a_2 + b_1 + c_1 &= 1 \\ 3a_1 - 2b_1 + c_1 &= 0 \\ 3a_2 + 2b_1 + c_1 &= 0. \end{aligned}$$

   Megoldásként kapjuk, hogy $a_1 = a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = b_2 = 0$ és $c_1 = c_2 = \frac{3}{2}$. A feltételnek megfelelő spline tehát $S(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$, $x \in [-1, 1]$.

6. Alkalmazzuk a 2. feladatban szereplő adatokra az `interp1` függvény más algoritmusát! Mi a különbség közöttük?

2. Közelítés legkisebb négyzetes értelemben, A `Polyfit` és `Polyval` függvények

Legyenek adottak az (x_i, f_i) $(i = 1, \ldots, n+1)$ pontpárok. Keressük azt a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ görbét, melyre a

$$\sum_{i=1}^{n+1} (f_i - g(x_i))^2 \tag{8}$$

négyzetes különbségek összege minimális. Ha a g függvény egy elsőfokú polinom, akkor lineáris regresszióról beszélünk.

Ha az elsőfokú polinomot $g(x) = a_0 + a_1 x$ alakban keressük, akkor a legkisebb négyzetes értelmében illeszkedő egyenes együtthatóit a

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=1}^{n+1} x_i \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i & \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n+1} f_i \\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i f_i \end{bmatrix} \tag{9}$$

alakú egyenletrendrendszer megoldásából kapjuk.

Bizonyítás. A feladat megoldásához az

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n+1} (f_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

függvényt kell minimalizálni. Ekkor az $F'_{a_0}(a_0, a_1) = 0$ és $F'_{a_1}(a_0, a_1) = 0$ feltételeknek eleget tevő a_0, a_1-et keressük. A parciális deriváltakra a

$$-2 \sum_{i=1}^{n+1} (f_i - a_0 - a_1 x_i) = 0$$
$$-2 \sum_{i=1}^{n+1} (f_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0$$

egyenletrendszert kapjuk. Az egyenletrendszer felírható

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_1 x_i = \sum_{i=1}^{n+1} f_i$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} a_0 x_i + \sum_{i=1}^{n+1} a_1 x_i^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i f_i$$

alakban, amelyből kapjuk a (9) egyenletrendszert. □

Feladat

7. Keressük meg az alábbi pontokat legjobban közelítő legfeljebb elsőfokú polinomot!

8. Illesszünk elsőfokú polinomot az előző feladat adatira a `polyfit` függvény segítségével!

x_i	f_i
-1	1
0	2
1	2
2	4

```
» x = [-1 0 1 2]
» f = [1 2 2 4]
» p = polyfit(x, y, 1)
» xi = linspace(-1, 2)
» fi = polyval(p, xi)
» plot(xi, fi, x, f, 'o')
```

9. Az alábbi táblázat egy autó féktávolságát mutatja a sebesség függvényében.

v (km/h)	20	40	60	80	100	120
d (m)	6	18	36	60	91	128

Határozzuk meg az adatokra legjobban illeszkedő másodfokú polinomot! Ábrázolja az adatokat és az illesztett polinomot egy ábrán! Mennyi lesz a féktávolság 90 km/h-nál? Mekkora sebességnél lesz a féktávolság pont 50 m?

10. Alkalmazzuk a polyfit függvényt az alábbi adatokra! Illesszünk rá egy 8-ad fokú polinomot! Mit tapasztalunk?

0.16	0.36	0.79	1.73	3.31	5.83	7.72	8.98	11.50
336	504	714	976	1302	1628	1812	1932	2142