1. Feladatsor: Bevezetés

1. Modellalkotás és hibaforrásai

A megoldandó probléma

$\downarrow$ modellhiba, mérési hiba

Tudományos modell

$\downarrow$ képlethiba

Matematikai modell

$\downarrow$ diszkretizációs hiba

Numerikus modell

$\downarrow$ kerekítési és ábrázolási hiba

Számítógépes modell

2. Gépi számábrázolás

Legyen adott egy a szám, a számrendszer alapja. Legyenek $k^- \leq k^+$ adott egész számok és $t \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(a, t, k^-, k^+) := \left\{ \pm a^k \sum_{i=1}^{t} x_i a^{-i} : k^- \leq k \leq k^+, 0 \leq x_i \leq a-1, i = 1, 2, \ldots, t \right\} \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

a gépi számok halmaza, ahol t a mantissza hossza és $k^- \leq k \leq k^+$ egy egész szám, az úgynevezett exponens (vagy karakterisztika). Megállapodunk abban, hogy egy gépi szám felírásában $x_1 \neq 0$, ekkor normalizált lebegőpontos számról beszélünk. A 0 olyan gépi szám, amely nem normalizált. Egy $x \in \mathcal{M} \setminus 0$ szám tehát

$$x = \pm a^k \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a^2} + \ldots + \frac{x_t}{a^t} \right) \tag{2}$$

alakba írható, ahol $x_1 \neq 0$. Ha $x = a^k \sum_{i=1}^{t} x_i a^{-i} \in \mathcal{M} \setminus 0$, akkor $x' = x + a^{k-t}$az x rákövetkezője. Ha $x = 0$, akkor az ő rákövetkezője: $0' = \varepsilon_0 = a^{k^-} \cdot a^{-1} = a^{k^- -1}$. Ebből következik, hogy $\varepsilon' = \varepsilon + a^{k^- - t}$. A legnagyobb gépi szám $M_\infty = a^{k^+}(1 - a^{-t})$.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan valós szám, amelyre $|x| \leq M_\infty$. Ekkor legyen

$$fl : \mathbb{R} \to \mathcal{M},\ fl(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \text{az } x\text{–hez legközelebb eső gépi szám}, & \text{ha } \varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty. \end{cases} \tag{3}$$

Ha $|x| > M_\infty$, akkor $fl(x)$ vagy nem értelmezett, vagy a NaN (not a number) értéket kapja.

Feladatok

1. Legyenek $a = 0.3$ és $b = 0.1 + 0.1 + 0.1$. Ellenőrizzük, hogy egyenlőek–e!

```
» a = 0.3; b = 0.1 + 0.1 + 0.1;
» a == b
```

2. Számoljuk ki $\cos(\pi/2)$ értékét! Milyen eredményt kapunk?

```
» cos(pi/2)
```

3. Írjuk fel az $\mathcal{M}(2, 2, -2, 1)$ elemeit! Számítsuk ki M_∞, ε_0 értékeket, majd ábrázoljuk az $1/10$, $3/16$, $1/\pi$ számokat!

   Megoldás:

   Az $\mathcal{M}(2, 2, -2, 1)$ elemei ekkor $\mathcal{M} = \left\{\pm 2^k \sum_{i=1}^{2} x_i 2^{-i} : -2 \le k \le 1, 0 \le x_i \le 1, x_1 \neq 0\right\}$, azaz

$$\mathcal{M} = \left\{\pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{16}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}\right\},$$

   továbbá

$$\varepsilon_0 = 2^{-2-1} = \frac{1}{8}, \quad M_\infty = 2^1(1 - 2^{-2}) = \frac{3}{2}.$$

   Az ábrázolandó számok pedig

$$fl(1/10) = 0, \quad fl(3/16) = 3/16, \quad fl(1/\pi) = 3/8.$$

4. Ábrázoljuk az ε értéket! Mi történik ha a 3–hoz hozzáadunk 10^{-20} értéket?

```
» eps
» a = 3; b = 3 + 10∧-20
» a == b
```

3. Normák, kondíciószám

A Matlab beépített függvényei segítségével meghatározhatjuk vektorok, mátrixok normáit, illetve mátrixok kondíciószámát. Legyen v egy adott vektor, A pedig egy adott négyzetes mátrix.

- `norm(v, p)`: a v vektor p–normája
- `norm(A, 1)`: az A mátrix 1–es normája
- `norm(A, 2)`: az A mátrix 2–es normája
- `norm(A, Inf)`: az A mátrix maximum normája

- `norm(A, 'fro')`: az A mátrix Frobenius normája
- `cond(A, p)`: az A mátrix kondíciószáma p norma esetén

Feladatok

1. Legyenek $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Mennyi $||A||_1$ és $||A||_{\text{inf}}$ értéke?

```
» A = [1 -2; -1 4];
» norm(A, 1)
» norm(A, Inf)
```

2. Legyen λ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egye tetszőleges sajátértéke. Mutassuk meg, hogy $\lambda \leq ||A||$ teljesül minden indukált mátrixnorma esetén.

3. Számítsuk ki $cond_{inf}(A)$–t az alábbi mátrix esetén!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket és hasonlítsuk össze a megoldásokat!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$