Csomók és invariánsaik

Szabó Szilárd

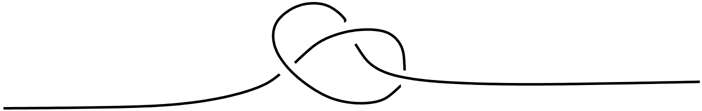
Fiatal Oktatói Napok
Budapesti Műszaki Egyetem

2008. június 3.

Mi egy csomó?

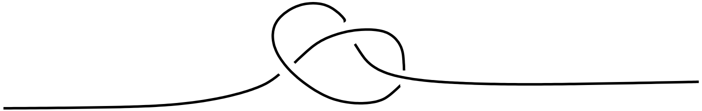
Mi egy csomó?

Például ez:

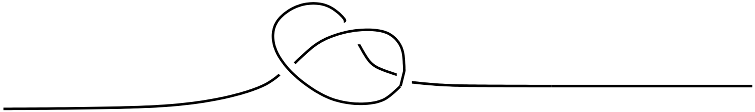


Mi egy csomó?

Például ez:

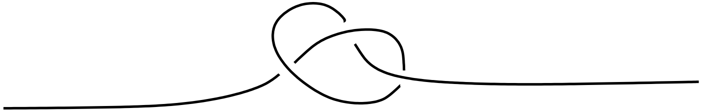


És ez?

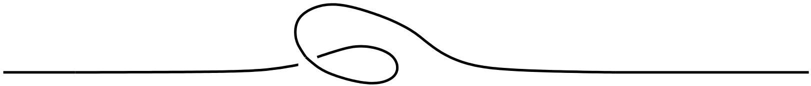


Mi egy csomó?

Például ez:

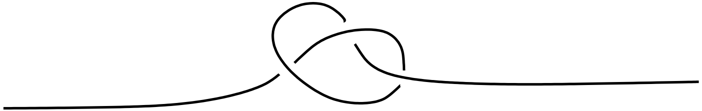


És ez?



Mi egy csomó?

Például ez:



És ez?

Kicsomózható.

A csomó szabatos fogalma

Legyen

$$S^1 = \{(x, y) \quad | \quad x^2 + y^2 = 1\}$$

az egységkör $\mathbb{R}^2$-ben, a szokásos (az óra járásával ellentétes) irányításával.

A csomó szabatos fogalma

Legyen

$$S^1 = \{(x, y) \quad | \quad x^2 + y^2 = 1\}$$

az egységkör $\mathbb{R}^2$-ben, a szokásos (az óra járásával ellentétes) irányításával.

Definíció

Egy csomó egy $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ beágyazás, amely diffeomorfizmus S^1 és a képe között.

A csomó szabatos fogalma

Legyen

$$S^1 = \{(x, y) \quad | \quad x^2 + y^2 = 1\}$$

az egységkör $\mathbb{R}^2$-ben, a szokásos (az óra járásával ellentétes) irányításával.

Definíció

Egy csomó egy $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ beágyazás, amely diffeomorfizmus S^1 és a képe között.

Megjegyzés

Beágyazás: nem metszi önmagát.
Diffeomorfizmus: Kellőképpen sima.
A körvonal irányítása indukál egy irányítást a γ képén is, amit az ábrán egy nyíllal jelölünk.

Vetítési képek

Legyen $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ egy csomó, és $v \in S^2$ egy egységvektor $\mathbb{R}^3$-ban. Ekkor γ v irányú vetítési képe az a síkgörbe, amely γ-t egy v-re merőleges, γ képétől v irányában levő S_v síkra levetítve adódik, minden többszörös pontban megjegyezve az ágak S_v-től való távolságainak sorrendjét ("első ág", "második ág", stb.)
Jelölés: $\pi_v(\gamma)$.

Vetítési képek

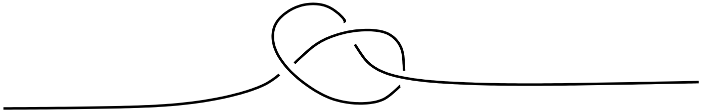
Legyen $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ egy csomó, és $v \in S^2$ egy egységvektor $\mathbb{R}^3$-ban. Ekkor γ v irányú vetítési képe az a síkgörbe, amely γ-t egy v-re merőleges, γ képétől v irányában levő S_v síkra levetítve adódik, minden többszörös pontban megjegyezve az ágak S_v-től való távolságainak sorrendjét ("első ág", "második ág", stb.)
Jelölés: $\pi_v(\gamma)$.
Azt mondjuk, hogy a $\pi_v(\gamma)$ vetítési kép reguláris, ha a kapott síkgörbének legfeljebb csak kettős pontjai vannak, és ezeken kívül sima.

Vetítési képek

Legyen $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ egy csomó, és $v \in S^2$ egy egységvektor $\mathbb{R}^3$-ban. Ekkor γ *v irányú vetítési képe* az a síkgörbe, amely γ-t egy v-re merőleges, γ képétől v irányában levő S_v síkra levetítve adódik, minden többszörös pontban megjegyezve az ágak S_v-től való távolságainak sorrendjét ("első ág", "második ág", stb.)
Jelölés: $\pi_v(\gamma)$.
Azt mondjuk, hogy a $\pi_v(\gamma)$ vetítési kép *reguláris*, ha a kapott síkgörbének legfeljebb csak kettős pontjai vannak, és ezeken kívül sima.
Sard tételéből következik, hogy minden γ csomónak létezik reguláris vetítési képe, sőt, majdnem minden vetítési képe reguláris. Ebből az is látszik, hogy ha adott véges sok csomó, akkor majdnem minden $v \in S^2$-re ezen csomók mindegyikének vetítési képe reguláris.

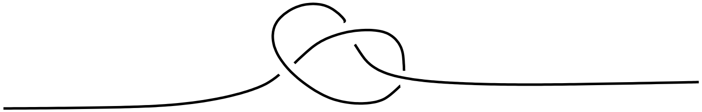
Kedvenc példánk

Ez volt:

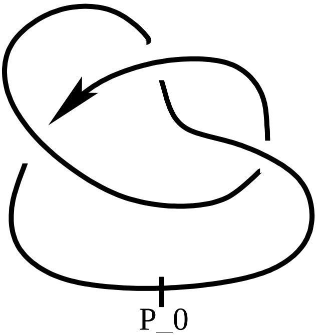


Kedvenc példánk

Ez volt:



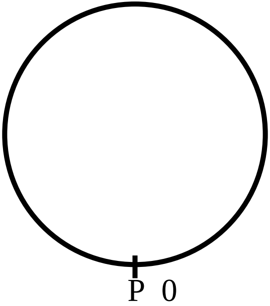
Összeragasztva a végeket kapjuk a K_j-vel jelölt úgynevezett jobb lóhere-csomót:



A triviális csomó

Ha ugyanezt elvégezzük a

egyenes vonalra, akkor kapjuk az O:



úgynevezett triviális csomót.

Izotópia

Definíció

Legyenek γ_0, γ_1 csomók. Azt mondjuk, hogy izotópak egymással, ha létezik csomók olyan sima γ_t serege $t \in [0, 1]$-re, amely γ_0-t γ_1-be transzformálja.

Megjegyzés

Fontos, hogy itt mindegyik közbülső γ_t görbéről megköveteljük hogy csomó legyen, tehát nem metszheti önmagát. Könnyű látni, hogy ha ezt nem követelnénk meg, akkor bármely két csomó egymásba lenne vihető.
Az izotópia a csomók halmazán ekvivalencia-reláció.
A csomókat izotópia erejéig azonosnak tekintjük.

Átparaméterezések

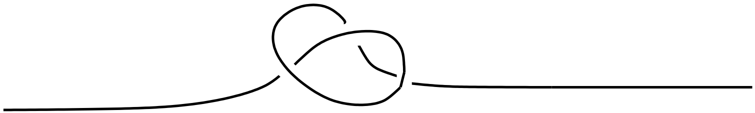
Legyen γ egy csomó és $\varphi : S^1 \to S^1$ egy irányítástartó diffeomorfizmus (kölcsönösen egyértelmű sima leképezés, amelynek inverze is sima). Ekkor a $\gamma \circ \varphi$ csomót γ φ-vel való átparaméterezésének nevezzük.

Átparaméterezések

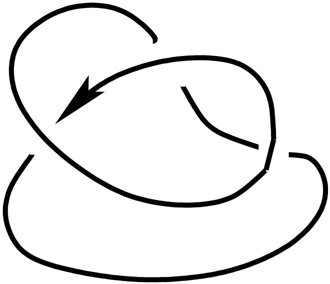
Legyen γ egy csomó és $\varphi : S^1 \to S^1$ egy irányítástartó diffeomorfizmus (kölcsönösen egyértelmű sima leképezés, amelynek inverze is sima). Ekkor a $\gamma \circ \varphi$ csomót γ φ-vel való átparaméterezésének nevezzük.
Mivel az S^1 irányítástartó diffeomorfizmusainak tere összefüggő, azért egyszerűen látszik hogy minden csomó izotóp bármely átparaméterezésével. Ezért ahhoz, hogy megadjunk egy csomót izotópia erejéig, elegendő megadni a képét és annak körbejárási irányát.

Egy triviális csomó

Másik példa:



összeragasztás után a H_j



csomóba megy át. Mint láttuk, ez utóbbi tehát egy triviális csomó.

A csomóelmélet fő problémája

Probléma

Osztályozzuk a csomókat izotópia erejéig!

A csomóelmélet fő problémája

Probléma

Osztályozzuk a csomókat izotópia erejéig!

Megoldatlan.

A csomóelmélet fő problémája

Probléma

Osztályozzuk a csomókat izotópia erejéig!

Megoldatlan.

Cél

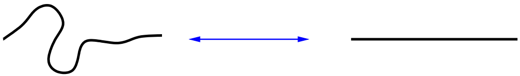
Bebizonyítani, hogy a jobb lóhere csomó nem izotóp a triviálissal.

A Reidemeister-mozgások

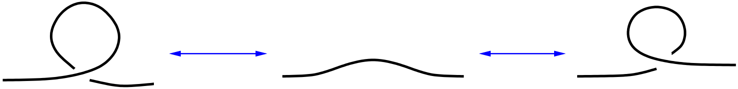
Tétel (K. Reidemeister, J. Alexander, 1927)

Legyen γ_0 *és* γ_1 *két csomó, és* $v \in \mathbb{R}^3$ *tetszőleges olyan egységvektor, amelyre* $\pi_v(\gamma_0)$ *és* $\pi_v(\gamma_1)$ *regulárisak. Ekkor* γ_0 *akkor és csak akkor izotóp* γ_1*-gyel, ha* v *irányú vetítési képeik a következő mozgások véges egymás utáni sorozatának elvégzésével átvihetők egymásba:*

- *R0: síkbeli görbe-izotópia a metszéspontokon kívül*

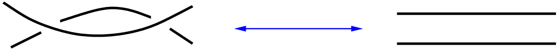


- *R1:*

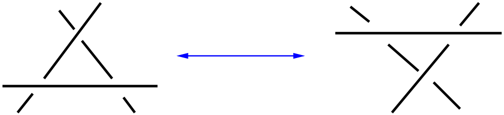


A Reidemeister-mozgások, II.

- R2:



- R3:



Csomó-invariánsok

Ahhoz, hogy két γ_0, γ_1 csomót megkülönböztessünk, elég tehát minden γ csomóhoz hozzárendelni egy olyan $I(\gamma)$ mennyiséget, amit a Reidemeister-mozgások nem változtatnak meg (azaz csak γ izotópia-osztályától függ), és amely nem ugyanazt az értéket veszi fel γ_0-n és γ_1-en.
Egy ilyen I mennyiséget csomó-invariánsnak nevezünk, és azt mondjuk, hogy megkülönbözteti γ_0-t és γ_1-et.

Cél

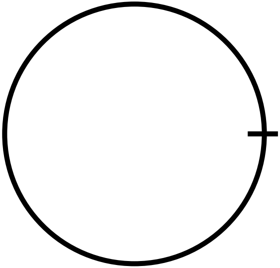
Találjunk egy olyan csomó-invariánst, ami megkülönbözteti a jobb lóhere-csomót a triviális csomótól!

Gauß-diagramok

Legyen $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ egy paraméterezett csomó, és $\pi_v(\gamma)$ egy reguláris vetítési képe. Vegyük az S^1 egységkört a síkban, jelöljük meg az $1 \in \mathbb{C}$ pontját, amit a kör kezdőpontjának nevezünk.
Minden olyan $t \neq t' \in S^1$-re, amelyre $\pi_v(\gamma(t)) = \pi_v(\gamma(t'))$, húzzuk be a tt' húrt S^1-ben, és rajzoljunk egy nyilat a "felső" (azaz S_v-hez közelebbi) ág irányába.
Az így kapott ábra $\pi_v(\gamma)$ Gauß-diagramja. Jelölés: $G_{\gamma,v}$.

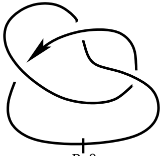
A triviális példa

A triviális csomó szokásos vetítési képének Gauß-diagramja:

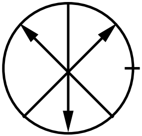


A jobb lóhere-csomó Gauß-diagramja

Könnyen látszik, hogy a K_j

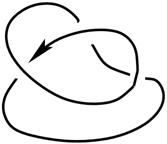


jobb lóhere-csomóra végrehajtva az eljárásunkat, a következő G_{K_j} diagramot kapjuk:

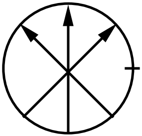


A hamis lóhere-csomó Gauß-diagramja

A lóhere-csomóban egy metszéspontot megváltoztatva kapott



H_j triviális csomó Gauß-diagramja következő:



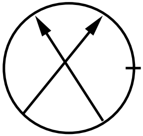
Egy ellenpélda

Egy tetszőleges S^1-beli irányított húrokból álló diagramot **húr-diagramnak** nevezünk.

Egy ellenpélda

Egy tetszőleges S^1-beli irányított húrokból álló diagramot húr-diagramnak nevezünk.

Nem minden húr-diagram kapható meg, mint valamely csomó Gauß-diagramja. Például:

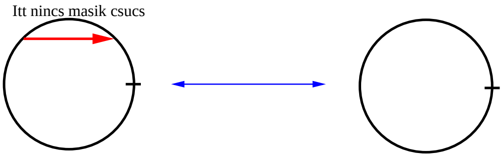


Ehhez ugyanis a

két ágát kellene további metszéspontok nélkül összekötni egy összefüggő vonallá, ami lehetetlen.

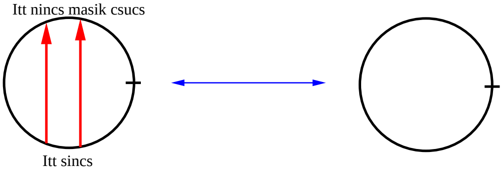
A Reidemeister-mozgások hatása a Gauß-diagramon

- R0: A húrok egymáshoz viszonyított heylzetét nem változtatja, csak metszésszögüket és a kezdőponthoz viszonyított helyüket.
- R1: Egy olyan nyíl hozzáadása illetve elvétele, amelynek kezdő- és csúcspontja közötti valamelyik köríven nincs másik húr végpontja:

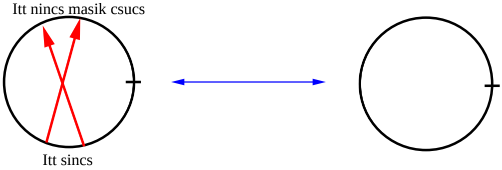


A Reidemeister-mozgások hatása a Gauß-diagramon II.

- R2: Két olyan nyíl hozzáadása illetve elvétele, amelyeknek csúcspontjaik közötti valamelyik köríven nincs másik húr végpontja, továbbá kezdőpontjaik közötti valamelyik köríven sincs másik húr végpontja:

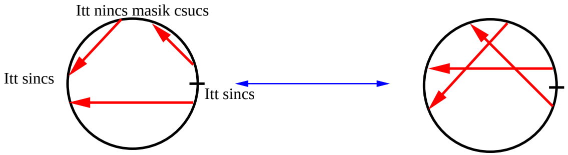


vagy



A Reidemeister-mozgások hatása a Gauß-diagramon III.

- R3: Több eset létezik, ezek egyike:



Részdiagramok

Legyenek A, G tetszőleges húr-diagramok. Ekkor G-nek egy A-val izomorf részdiagramjának hívunk olyan G-beli húrok egy halmazát, amely A-ból S^1-nek valamely 1-et rögzítve hagyó átparaméterezésével kapható meg. Jelölés: $A \subset G$.

Részdiagramok

Legyenek A, G tetszőleges húr-diagramok. Ekkor G-nek egy A-val izomorf részdiagramjának hívunk olyan G-beli húrok egy halmazát, amely A-ból S^1-nek valamely 1-et rögzítve hagyó átparaméterezésével kapható meg. Jelölés: $A \subset G$.
Legyen γ egy csomó és $\pi_v(\gamma)$ egy reguláris vetítési képe.
Értelmezzük a következő mennyiséget:

$$I_A(\gamma, v) = |\{A \subset G_{\gamma,v}\}|$$

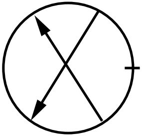
a $G_{\gamma,v}$ összes A-val izomorf részdiagramjának száma.

Példák részdiagramokra

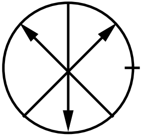
A triviális csomó szokásos G_0 Gauß-diagramjában egyetlen él sincs, így G_0-nak nincs semilyen nemüres A-val izomorf részdiagramja sem. Többek között, minden A-ra $I_A(O) = 0$.

Példák részdiagramokra II.

Legyen A a következő húr-diagram:

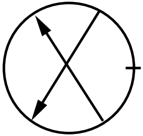


Könnyen látható, hogy a jobb lóhere-csomó G_{K_j} Gauß-diagramjában pontosan egy A-val izomorf részdiagram található, és ezért $I_A(K_j) = 1$:

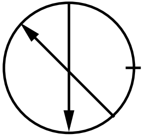


Példák részdiagramokra II.

Legyen A a következő húr-diagram:

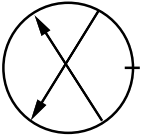


Könnyen látható, hogy a jobb lóhere-csomó G_{K_j} Gauß-diagramjában pontosan egy A-val izomorf részdiagram található, és ezért $I_A(K_j) = 1$:

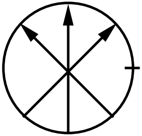


Példák részdiagramokra III.

Legyen most A ugyanaz a húr-diagram mint az előző lapon:



Ekkor az előzővel ellentétben, a triviális H_j csomó



Gauß-diagramjában egyetlen A-val izomorf részdiagram sem található. Ezért $I_A(H_j) = 0$.

Invariánsok húr-diagramokból

Ha adottak $A_1, \dots, A_n$ húr-diagramok és $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ számok, amelyekre az

$$I = q_1 I_{A_1} + \dots + q_n I_{A_n} \qquad \text{mod } (2)$$

mennyiség független γ izotópia-osztályától, akkor I-t egy (modulo 2) Vasziljev-invariánsnak nevezzük.

Invariánsok húr-diagramokból

Ha adottak $A_1, \ldots, A_n$ húr-diagramok és $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ számok, amelyekre az

$$I = q_1 I_{A_1} + \cdots + q_n I_{A_n} \qquad \text{mod } (2)$$

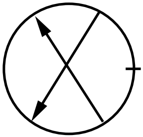
mennyiség független γ izotópia-osztályától, akkor I-t egy (modulo 2) Vasziljev-invariánsnak nevezzük.

Kérdés

Mely $A_1, \ldots, A_n$-re és $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$-re lesz I invariáns?

A legegyszerűbb Vasziljev-invariáns

Legyen A továbbra is a következő húr-diagram:

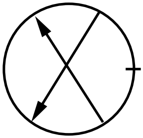


Tétel (V. Vasziljev, 1992)

Ekkor I_A modulo 2 egy csomó-invariáns.

A legegyszerűbb Vasziljev-invariáns

Legyen A továbbra is a következő húr-diagram:



Tétel (V. Vasziljev, 1992)

Ekkor I_A modulo 2 egy csomó-invariáns.

Következmény

A lóhere csomó nem izotóp a triviálissal.

Bizonyítás

Láttuk, hogy $I_A(K_j) = 1$ valamint $I_A(O) = 0$. A tétel alapján azonban izotóp csomókra I_A-nak ugyanazt az értéket kell felvennie.

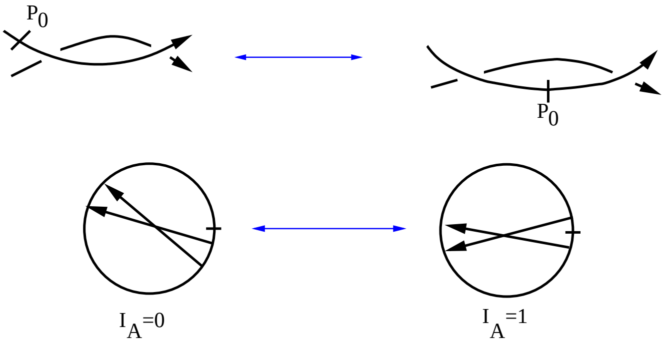
Kombinatorikus bizonyítás

Próbáljuk meg belátni Vasziljev tételét kombinatorikai úton! Azaz, lássuk be, hogy a Reidemeister-mozgások hatása a húr-diagramokon nem változtatja I_A-t.

Kombinatorikus bizonyítás

Próbáljuk meg belátni Vasziljev tételét kombinatorikai úton! Azaz, lássuk be, hogy a Reidemeister-mozgások hatása a húr-diagramokon nem változtatja I_A-t.

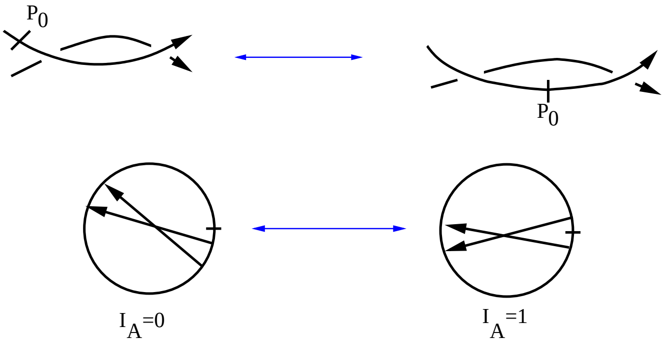
- R0:



Kombinatorikus bizonyítás

Próbáljuk meg belátni Vasziljev tételét kombinatorikai úton! Azaz, lássuk be, hogy a Reidemeister-mozgások hatása a húr-diagramokon nem változtatja I_A-t.

- R0:

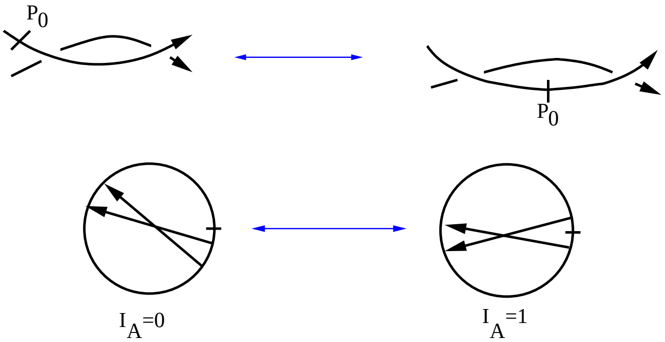


Nem teljesíti!

Kombinatorikus bizonyítás

Próbáljuk meg belátni Vasziljev tételét kombinatorikai úton! Azaz, lássuk be, hogy a Reidemeister-mozgások hatása a húr-diagramokon nem változtatja I_A-t.

- R0:



Nem teljesíti! Ok: Nem minden húr-diagram Gauß-diagram!

A gömb felület-formája

Legyen S^2 a két-dimenziós gömbfelület $\mathbb{R}^3$-ban, és ω a szokásos felület-forma S^2-n, amelyben S^2 felülete 1. Értelmezzük a következő tartományokat:

$$\begin{aligned} \Delta_4 =&\{(t_1, t_2, t_3, t_4)| \quad 0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < 1\} \\ \Delta_3 =&\{(t_1, t_2, t_3, z)| \quad 0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1, \\ & z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \gamma(t_3), \}\} \end{aligned}$$

Két integrál

Ezután, tekintsük a következő integrálokat:

$$I_X(\gamma) = \int_{\Delta_4} \omega(\gamma(t_3) - \gamma(t_1)) \wedge \omega(\gamma(t_4) - \gamma(t_2))$$

$$I_Y(\gamma) = \int_{\Delta_3} \omega(z - \gamma(t_1)) \wedge \omega(z - \gamma(t_2)) \wedge \omega(z - \gamma(t_3))$$

Két integrál

Ezután, tekintsük a következő integrálokat:

$$I_X(\gamma) = \int_{\Delta_4} \omega(\gamma(t_3) - \gamma(t_1)) \wedge \omega(\gamma(t_4) - \gamma(t_2))$$
$$I_Y(\gamma) = \int_{\Delta_3} \omega(z - \gamma(t_1)) \wedge \omega(z - \gamma(t_2)) \wedge \omega(z - \gamma(t_3))$$

Tétel (X-S. Lin, Z. Wang, 1994)

Minden γ csomóra

$$I_A(\gamma) = I_X(\gamma) - I_Y(\gamma) + \frac{1}{24} \mod (2).$$

Két integrál

Ezután, tekintsük a következő integrálokat:

$$I_X(\gamma) = \int_{\Delta_4} \omega(\gamma(t_3) - \gamma(t_1)) \wedge \omega(\gamma(t_4) - \gamma(t_2))$$

$$I_Y(\gamma) = \int_{\Delta_3} \omega(z - \gamma(t_1)) \wedge \omega(z - \gamma(t_2)) \wedge \omega(z - \gamma(t_3))$$

Tétel (X-S. Lin, Z. Wang, 1994)

Minden γ csomóra

$$I_A(\gamma) = I_X(\gamma) - I_Y(\gamma) + \frac{1}{24} \mod (2).$$

Azaz: elég belátni hogy $I_X(\gamma) - I_Y(\gamma)$ izotópia-invariáns.

Az általános Vasziljev-invariáns

Tétel (D. Bar-Natan, 1991)

$I_X - I_Y$ *izotópia-invariáns.*

Az általános Vasziljev-invariáns

Tétel (D. Bar-Natan, 1991)

$I_X - I_Y$ *izotópia-invariáns.*

Tétel (M. Koncevics, 1993)

Minden

$$I = q_1 I_{A_1} + \cdots + q_n I_{A_n} \qquad \mod (2)$$

Vasziljev-invariánsra létezik egy, az előzőhöz hasonló integrál-képlet.

Konklúzió

Csomók izotópiájának eldöntése:

- Algoritmus: kombinatorika
- Bizonyítás: integrál-geometria.