1. Feladatok

1. Adjon pontos bizonyítást az 1.9 Lemmára:
A Gauss-leképezésnek van sima invariáns mértéke, amelynek sűrűségfüggvénye
$$\rho(x) = \frac{1}{(1+x)\log 2}.$$

2. Legyen $(M, \mathscr{B}, T)$ endomorfizmus, ahol M topologikus tér, $\mathscr{B}$ a Borel σ-algebra, és T folytonos. A T endomorfizmust *topologikusan tranzitív*nak nevezzük, ha létezik sűrű orbit. T-t *minimális*nak nevezzük, ha nem létezik valódi, zárt, nem-üres, invariáns részhalmaza M-nek. *1. Igazoljuk, hogy a körvonal* $R_\alpha : S \to S$, $R_\alpha := x + \alpha$ (mod 1) *forgatása topologikusan tranzitív, sőt minimális, ha* $\alpha \notin \mathbb{Q}$. *2. Mutasson példát topologikusan tranzitív, de nem minimális leképezésre.*

3. (V. Arnold) Tekintsük az $1, 2, \ldots, 2^n, \ldots$ számsorozat tizes számrendszerben felírt alakjának első jegyeit. Előfordul ezek között a 7? A 8? Ha igen, melyik gyakoribb?

4. Mutassuk meg, hogy ha valamely n-re T^n ergodikus endomorfizmus, akkor T is az. Adjunk példát arra, hogy az állítás megfordítása nem igaz.
Utalás: $\mu(T^{-n}A \Delta A) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j+1}A \Delta T^{-j}A)$, ugyanis $\mathrm{d}(A, B) := \mu(A \Delta B)$ metrikát definiál a mérhető részhalmazokon.

5. (Neumann ergodtétele operátorokra) Legyen U a H szeparábilis Hilbert tér izometriája, és P az ortogonális vetítés az invariáns vektorok $\mathscr{I} := \{f \in H \mid Uf = f\}$ alterére. Ekkor minden $f \in H$-ra teljesül
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i f = Pf.$$

6. Adjon pontos bizonyítást a 3.7 Tételre:
A tórusz (1.12-vel értelmezett eltolása akkor és csak akkor ergodikus, ha $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ racionálisan függetlenek, ahol $\alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_d)$.

7. $^\times$ Mutassuk meg, hogy 2^n, $n \in \mathbb{Z}^+$ az 0,1,2,...,9 jegyek tetszőleges véges hosszú sorozatával kezdődhet (az első jegy persze nem 0).

8. * (Simányi–Szász) Legyen $(M, \mathscr{F})$ mérhető tér, G csoport. Legyen adott minden $g \in G$-re egy $(M, \mathscr{F}, T_g)$ automorfizmus. Az $(M, \mathscr{F}, T_G) = \{(M, \mathscr{F}, T_g)\colon g \in G\}$ családot *csoport-hatásnak* nevezzük, ha $\forall g_1, g_2 \in G$-re $T_{g_1 g_2} = T_{g_2} T_{g_1}$ (a G csoport hat az M téren). Tetszőleges $x \in M$ esetén az x *G-pályájának* nevezük a $Gx := \{T_g x\colon g \in G\}$ halmazt.

Legyen adott $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, és tekintsük $\mathbb{R}^d$-ben az α-ra ortogonális g vektorok $\mathbb{R}^{d-1}$-el izomorf additív G csoportját. Hasson $\mathbb{R}^d$-n a G csoport a következőképpen: $\forall g \in G, x \in \mathbb{R}^d$-re
$$T_g x = g + x.$$

$\mathbb{R}^d$-t faktorizálva $\mathbb{Z}^d$ szerint végül is $\mathbb{T}^d$-n kapunk egy G-hatást.

Bizonyítsuk be, hogy

- *G-nek csak akkor van $\mathbb{T}^d$-ben sűrű pályája, ha az α koordinátái között van kettő lineárisan független (és akkor minden pálya sűrű);*
- *Az előbbi feltétel mellett a pályák aszimptotikusan egyenletes eloszlásúak (mit is jelent ez?);*

9. ** *(Előző folytatása) Legyen adott $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy van olyan véges F halmaza az α-knak, hogy ha $\alpha \notin F$, akkor $G = G_\alpha$ minden pályája metszi az U halmazt.*

10. $^{*\times}$ A csoport-hatás speciális esete a *csoport-eltolás*.
Legyen M kompakt topológikus csoport és μ a Haar-mérték M-en. Tetszőleges rögzített $g \in G$-re legyen
$$T_g\, x = g \cdot x.$$
Ekkor $(M, \mathscr{F}, T_g, \mu)$ automorfizmus. Ez a példa egyben általánosítása a tórusz feltekerésének
Mi T_g ergodicitásának feltétele, ha G Abel-csoport?

11. $^{*\times}$ A $\mathbb{T}^d$ tórusz $T_\alpha : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, $T_\alpha = x + \alpha \pmod 1$ eltolása akkor és csakis akkor minimális, ha $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ racionálisan függetlenek.

12. $^{\times}$ A $D : S \to S$, $Dx = 2x \pmod 1$ diadikus leképezés
    a) topologikusan tranzitív?
    b) minimális?

13. $^{\times}$ Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ sík $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixszal adott lineáris leképezését. Mutassuk meg, hogy A természetes módon származtatja a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tórusz T_A automorfizmusát (kissé pongyolán $T_A x = Ax (\mathrm{mod}\, \mathbb{Z}^2)$). Keressük meg ennek az invariáns mértékét!

14. $^{\times}$ Általánosítsuk az előző feladatban megjelenő szituációt magasabb dimenzióra is!

15. Igazoljuk a 6.4 Definició 3. következményét:
Az összes karakter ilyen alakú:
$$\chi_n(x) = \exp(2\pi i (n, x))$$
ahol $n \in \mathbb{Z}^d$ (ezek ugyanis a Cauchy-függvényegyenlet folytonos megoldásai).

16. Igazoljuk a 6.4 Definició 6. következményét:
A karakterek teljes ortonormált rendszert alkotnak $L_2(\mathbb{T}^d, \mu)$-ben, ahol a skalárszorzat $\langle \phi, \psi \rangle := \int \phi(x) \bar{\psi}(x) \mu(\mathrm{d}x)$. Speciálisan $\langle \chi_n, \chi_m \rangle = \delta_{n-m}$.

17. Igazolja a 6.8 Példában szereplő állítást:
Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrixnak pontosan két sajátértéke van az egységkörön, de ezek egyike sem komplex egységgyök. Igy az A által definiált automorfizmus ergodikus és keverő, de nem hiperbolikus (ez a dinamikai rendszer az úgynevezett parciálisan hiperbolikus rendszerek egyik legegyszerűbb példája).

18. Tekintsük az $M = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ halmazon a

$$(Tx)_i = \begin{cases} 1 - x_i & \text{ha } \forall\, j < i\text{-re } x_j = 1 \\ x_i & \text{különben} \end{cases}$$

összeadó gépet. (itt $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$).

a) Keressünk invariáns mértéket!

b) Mi T^{-1}?

19. $^{\times}$ $f : M \to M$ folytonos leképezése $M = \mathbb{T}^d$-nek. f akkor és csakis akkor topologikusan tranzitív, ha $\forall U,\ \ V \subset M$ nyílt halmazra $\exists N = N(U,V)$ egész szám ($N \geq 1$), hogy $U \cap f^N V \neq \emptyset$. (Az állítás igaz lokálisan kompakt, szeparábibilis metrikus terekre is.)

20. $^{\times}$ Tekintsük az $I = [0,1]$ intervallum $Tx = 4x(1-x)$ endomorfizmusát. Mutassuk meg, hogy I-nek vannak pontjai, amelyek sem periodikus pontok, sem gyengén periodikus pontok.

21. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy az előző feladatban szereplő leképezésnek a $\rho(x) = C \cdot (x(1-x))^{-\frac{1}{2}}$ függvény az invariáns sűrűsége. Mi C értéke?

22. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy a **20.** feladatban szereplő leképezés izomorf az

$$Tx = \begin{cases} 2x, & x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

sátor-tető leképezéssel. (Útmutatás: 21. feladat.)

23. $^{\times}$ Legyenek $x_1 < x_2 < \cdots < x_8$ a T^3 leképezés fixpontjai, ahol T a **21.** feladatban szereplő automorfizmus. Nyilván $x_1 = 0$.

a) Mely i-re lesz $x_i = \dfrac{3}{4}$?

b) Csoportosítsuk a maradék 6 pontot a T leképezés két 3 periodusú pályájába!

24. $^{\times}$ Legyen $(M, \mathscr{F}, \mu)$ mértéktér.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathrm{d}(A,B) := \mu(A\Delta B)$ pszeudo-metrika. $(A\Delta B := (A\setminus B)\cup(B\setminus A))$

b) Hogyan lehet $\mathrm{d}(A,B)$-t metrikává tenni?

c) Mutassuk meg, hogy

$$|\mu(X\cap Y) - \mu(U\cap V)| \le \mu(X\circ U) + \mu(Y\circ V).$$

25. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy a pék leképezése: $T : [0,1)^2 \to [0,1)^2$

$$T(x,y) = \begin{cases} \left(2x, \dfrac{y}{2}\right), & 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ \left(2x-1, \dfrac{y+1}{2}\right), & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

ergodikus és keverő.

26. $^{*\times}$ (Rényi Alfréd) T akkor és csakis akkor keverő, ha $\forall A \in \mathscr{F}$-re

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(T^{-n}A\cap A\right) \to [\mu(A)]^2.$$

27. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy $[0,1)$ következő leképezései ergodikusak és keverőek is:

a) $Tx = \left\{2x + \dfrac{1}{2}\right\}$

b) $Tx = \begin{cases} 2x, & x < \dfrac{1}{2} \\ 2(1-x), & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

28. Bizonyítsa be, hogy egy irredubicibilis Markov-eltolás ergodikus.

29. Bizonyítsuk be, hogy minden aperiodikus irredubicibilis Markov-eltolás keverő.

30. Tekintsük $[0,1]^2$-en az

$$A = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix által definiált $T = T_A$ leképezést. Legyen $x \in [0,1]^2$ és $\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{R}^2$, $|\mathbf{v}_\delta| = \delta \ll 1$, és $L_{x,\mathbf{v}_\delta} = \{y = x + t\mathbf{v}_\delta : t \in [-1,1]\}$. Hogyan viselkedik $T^n L_{x,\mathbf{v}_\delta}$?

31. *Jelölések, definíciók:*

i) Legyenek $(X_j, \mathscr{F}_j, \mu_j, T_j)|j = 1,2$ mértéktartó leképezések.
A $T = T_1 \times T_2$ *szorzat leképezést* $X_1 \times X_2$-n így definiáljuk: $T(x_1, x_2) = (T_1 x_1, T_2 x_2)$

ii) Legyen $X, \mathscr{F}, \mu, T)$ mértéktartó leképezés és tegyük fel, hogy $\{S_x | x \in X\}$ egy másik (Y, σ, ν) valószinűségi mező mértéktartó leképezései. Tegyük fel, hogy $S_x y : X \times Y \to Y$ együttesen mérhető leképezés. Akkor a $\tau(x,y) = (Tx, S_x y)$ relációval definiált $\tau : X \times Y \to X \times Y$ leképezést nevezzük *ferde szorzatnak.*

Legyen $X, \mathscr{F}, \mu, T)$ mértéktartó leképezés és tegyük fel, hogy $\{S_x | x \in X\}$ egy másik (Y, σ, ν) valószinűségi mező mértéktartó leképezései. Tegyük fel, hogy $S_x y : X \times Y \to Y$ együttesen mérhető leképezés. Akkor a $\tau(x,y) = (Tx, S_x y)$ relációval definiált $\tau : X \times Y \to X \times Y$ leképezést nevezzük *ferde szorzatnak.*
Bizonyítsuk be, hogy a

a) szorzat
b) ferde-szorzat

leképezések mértéktartó leképezések.

32. Mutassuk meg, hogy az indukált leképezés automorfizmus.

33. Bizonyítsuk be, hogy a T_1 és T_2 keverő, akkor $T_1 \times T_2$ is az.

34. Ha T_1 és T_2 ergodikus, akkor $T_1 \times T_2$ akkor és csak akkor ergodikus, ha
$$\Lambda_d(T_1) \cap \Lambda_d(T_2) = \{1\}.$$
($\Lambda_d(T)$ jelöli a T által indukált operátor sajátértékeinek halmazát.)

35. $^\times$ Melyek a Gauss-leképezés fixpontjai?

36. *Jelölések, definíciók*
Legyen $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ endomorfizmus.

a. Tegyük fel, hogy $\mu(A) > 0$. Legyen $T_A : A \to A$ a következő: legyen $T_A x := T^k x$, ha $k \in \mathbb{N}$ a legkisebb érték, amelyre $T^k x \in A$. T_A-t *Poincaré-leképezés*nek (vagy első visszatérés leképezésnek, vagy derivált leképezésnek) nevezzük.

b. $f : M \to \mathbb{N}$ mérhető függvény. Jelölje
$$M_f = \{(x,k) \mid x \in M, \quad 1 \le k \le f(x)\} \subset M \times \mathbb{N}.$$

Legyen $\mathscr{F}_f$ az $A \times \{k\}$, $A \subset \mathscr{F}$, $k \in \mathbb{N}$ halmazok által generált σ-algebra és legyen $\mu_f(A \times \{k\}) = \mu(A)$. Legyen $T_f : M_f \to M_f$ a következő:
$$T_f(x,k) = \begin{cases} (x, k+1) & \text{ha} \quad k \le f(x) \\ (Tx, 1) & \text{ha} \quad k = f(x)\,. \end{cases}$$

Ekkor $(M_f, \mathscr{B}_f, \mu_f T_f)$ a *torony-endomorfizmus*. (Megjegyezzük, hogy μ_f csak akkor valószínűségi mérték, ha $\int_M f \, \mathrm{d}\mu = 1$, de a definíció általában is értelmes, ha $f \in L_1(\mu)$.)

A. *Mutassuk meg, hogy a Poincaré-leképzés és a torony-leképezés is mértéktartóak.*

B. *Ha T ergodikus, $\mu(A) > 0$ és $f \in L_1(\mu)$, akkor T_A és T_f is ergodikusak.*

37. *Jelölések, definíciók:*
Legyen M topologikus tér, μ valószínűségi Borel-mérték

$$\operatorname{supp}\mu = \bigcap_{F \text{ zárt, } \mu(F)=1} F \qquad \text{(a } \mu \text{ mérték tartója)}$$

$$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} \overline{\bigcup_{j\geq n} T^j x} \qquad \text{(az } x \text{ fázispont } \omega\text{-limeszpontjai)}$$

$$R(T) = \{x \in M \mid x \in \omega(x)\} \qquad \text{(} T \text{ visszatérő pontjai)}$$

Legyen $(M, \mathscr{B}, \mu, T)$ endomorfizmus, ahol M szeparábilis metrikus tér, $\mathscr{B}$ a Borel σ-algebra, T folytonos. Igazoljuk:

A. *M μ-majdnem mindenütt visszatérő, azaz supp $\mu \subset \overline{R(T)}$*

B. *Ha M kompakt és T ergodikus, akkor μ-majdnem mindenütt pont pályája sűrű supp μ-ben*

38. Tekintsük a $[0, 1)$ intervallum $Tx = \{2(1-x)\}$ leképezését.

a) Melyek T periodikus pontjai?

b) Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^{n-1}x)]$$

értékét, ha $f(x) = \sin(2\pi x)$. Milyen értelemben vehetjük a limeszt?

39. Ergodikus-e a $[0, 1]$

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x, & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 2x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ \frac{5}{2} - 2x, & \frac{3}{4} < x < 1 \end{cases}$$

leképezése?

40. Keressük a $[0,1]$ intervallum

$$Tx \begin{cases} 3x, & 0 < x < \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right), & \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

leképezésének invariáns mértékét.

41. Mikor ergodikus a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Z}^2$ 2-tórusz $T_\alpha(x,y) = (x+\alpha,\ y+x)$ leképezése?