**Sztochasztikus folyamatok. 2008/2009 2. félév**
**Dr. Szász Domokos**
**1. feladatsor**
**Feltételes várható érték és valószínűség.**

1.1. (Feltételes várható érték tulajdonságai)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező. Jelölje $\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{T} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ és $X, X_j, Y \in L_1$. Igazolja a következő tulajdonságokat:

(a) $\mathbb{E}(X|\mathcal{T}) = \mathbb{E}X, \qquad \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = X;$

(b) $\mathbb{E}(\sum_1^n a_j X_j|\mathcal{F}) = \sum_1^n a_j \mathbb{E}(X_j|\mathcal{F})$

(c) $X \geq 0 \rightsquigarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq 0;$

(d) $(X_n \nearrow X \ \& \sup \mathbb{E}X_n < \infty) \rightsquigarrow \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \nearrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F});$

(e) $X_n \geq 0 \rightsquigarrow \mathbb{E}(\liminf X_n|\mathcal{F}) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F});$

(f) $(|X_n| \leq Y \in L_1 \ \& \ P(X_n \to X) = 1) \rightsquigarrow \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{F});$

(g) (Jensen) Ha $h : \mathbb{R} \circlearrowright$ konvex, akkor

$$\mathbb{E}(h(X)|\mathcal{F}) \geq h(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}));$$

(h)

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G});$$

(i) Ha $Y$ $\mathcal{F}$-mérhető, akkor

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \qquad \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) = Y;$$

(j) Ha $Y$ független $\mathcal{F}$-től, akkor $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) = \mathbb{E}Y$.

1.2. Két kockával dobunk. Legyen $X$ az egyik kocka eredménye, $Z$ pedig a kettő összege. Számolják ki $\mathbb{E}(X \mid Z)$-t.

1.3. Legyen $X$ egy $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változó, amire $\forall n \in \mathbb{N}$-re $P(X = n) > 0$. Lássa be, hogy ha $Y$ ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett véges várható értékű valószínűségi változó, és $\mathcal{F} = \sigma(X)$ pedig az $X$ által generált szigma-algebra, akkor

$$\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}\big(\mathbb{1}[X = n] \cdot Y\big)}{P(X = n)} \cdot \mathbb{1}[X = n]$$

Segítség: azt kell belátni, hogy az egyenlőségjel jobb oldalán levő valószínűségi változó kielégíti a feltételes várhatóérték absztrakt definícióját.

1.4. Lássa be, hogy az $X$ valószínűségi változó által generált $\sigma(X)$ szigma-algebra szerint mérhető $Y$ valószínűségi változók majdnem biztosan felírhatóak $Y = \varphi(X)$ alakban, ahol $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető-függvény.

Segítség: legyen először $Y$ olyan, hogy $P(Y = 0 \text{ vagy } Y = 1) = 1$.

1.5. Legyen $X$ és $Y$ együttesen abszolút folytonos eloszlású ($\mathbb{E}|Y| < \infty$), legyen az együttes sűrűségfüggvényük $f(x, y)$. Lássa be, hogy

$$\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y|\sigma(X)) = \frac{\int y f(X, y) dy}{\int f(X, y) dy}$$

1.6. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek és azonos eloszlásúak. Legyen $m \leq n$ esetén $S_m = \sum_{k=1}^{m} X_k$. Határozza meg $\mathbb{E}(S_m|S_n)$ értékét!

1.7. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ homogén Markov lánc a véges $S$ állapottéren, aminek az átmenetmátrixa $P$. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$.

$$\mathbb{E}\big(f(X_n)|\sigma(X_1, \ldots, X_{n-1})\big) =?$$

1.8. *A feltételes szórásnégyzet Pithagorasz-tétele (v. ö. Steiner tétel)*

Legyen $\mathbf{Var}(X|\mathcal{G}) := \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))^2|\mathcal{G}\big)$. Lássa be, hogy $\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}(\mathbf{Var}(X|\mathcal{G})) + \mathbf{Var}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$.

1.9. (a) Legyen $A \in \mathcal{A}$. Mutassuk meg, hogy

$$0 \leq P(A|\mathcal{F}) \leq 1$$

1 valószínűséggel.

(b) Ha $A_1, A_2, \ldots$ véges vagy megszámlálható sorozata diszjunkt eseményeknek, akkor

$$P(\cup_n A_n|\mathcal{F}) = \sum_n P(A_n|\mathcal{F})$$

1 valószínűséggel.

(c) Ha $A_n \nearrow (\searrow)\ A$, akkor $P(A_n|\mathcal{F}) \nearrow (\searrow)\ P(A|\mathcal{F})$ 1 valószínűséggel.

1.10. Legyen a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} \end{pmatrix}$$

mátrix pozitív definit, és tekintsük az $(X, Y)$ vektorváltozót az együttes

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi(\det \Sigma)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\det \Sigma}(\sigma_{2,2}x^2 - 2\sigma_{1,2}xy + \sigma_{1,1}y^2)\right]$$

sűrűségfüggvénnyel. Adjuk meg $Y$ feltételes eloszlását $X$ mellett.

## Martingálok I.

1.11. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ együttesen abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók, legyen az együttes sűrűségfüggvényük $f(x_1, \ldots, x_n)$ és $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Milyen feltételeknek kell teljesülnie $f$-re hogy $X_1, \ldots, X_n$ martingált alkosson?

1.12. Legyen $M_1, M_2, \ldots$ martingál $\big(\mathcal{F}_n\big)_{n=1}^{\infty}$-re nézve. Legyen $\mathcal{G}_k = \sigma(M_1, M_2, \ldots, M_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Mutassa meg, hogy $M_n$ martingál $\big(\mathcal{G}_n\big)_{n=1}^{\infty}$-re nézve is.

1.13. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók és $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Legyen $m(\gamma) := \mathbf{E}(e^{\gamma X_i})$ e valószínűségi változók (közös) momentum generáló függvénye. Tegyük fel, hogy valamely rögzített $\gamma \in \mathbb{R}$-re $m(\gamma)$ véges. Legyen $S_0 = 0$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ha $n > 0$. Értelmezzük az

$$M_n := m(\gamma)^{-n} \exp(\gamma S_n)$$

valószínűségi változókat. Bizonyítandó, hogy $M_n$ *martingál* az $\mathcal{F}_n$ természetes filtrációra nézve.

1.14. Legyen $X_i$, $i = 1, 2, \ldots$ véges várhatóértékű valószínűségi változók sorozata adaptált az $\big(\mathcal{F}_n\big)_{n=1}^{\infty}$ filtrációra nézve, ahol $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Bizonyítandó, hogy a

$$M_0 := 0, \qquad M_n := \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbf{E}(X_i | \mathcal{F}_{i-1}))$$

valószínűségi változó sorozat nulla várhatóértékű martingál.