Sztochasztikus folyamatok. 2008/2009 2. félév
Dr. Szász Domokos
11. feladatsor
Felújítási folyamatok

11.1. A Geiger-Müller számlálóba felújítási folyamat szerint érkeznek a részecskék. Legyenek $Z_n = \sum_{j=1}^{n} T_j : n \geq 0$ ennek pontjai. A számláló a részecskéket egymástól függetlenül p valószínűséggel regisztrálja, $1-p$ valószínűséggel viszont nem. A regisztrált időpontok $W_n : n \geq 0$. Milyen folyamatot alkotnak a $W_n : n \geq 0$ időpontok?

(a) általában;

(b) ha az eredeti folyamat Poisson folyamat volt.

11.2. Egy radioaktivitást mérő számlálóberendezés ezredmásodpercenként tud ugrani, és akkor ugrik egyet a $t = \frac{k}{1000}$ időpontban, ha volt beérkező alfa-részecske a $(t - \frac{1}{1000}, t]$ időintervallumban. Jelölje $T(n)$ azt a véletlen időpontot, amikor először mutat n értéket a számláló. Jelölje $N(t)$ a számlálóberendezés állását a t időpontban.

(a) *(A felújításelmélet alaptrükkje)* Melyik igaz a következő két állítás közül?

$$\mathbf{P}(N(t) \leq n) = \mathbf{P}(T(n) \geq t), \quad \mathbf{P}(N(t) < n) = \mathbf{P}(T(n) > t)$$

(b) Lássa be, hogy $\mathbf{P}(N(t) = n) = \mathbf{P}(T(n) \leq t) - \mathbf{P}(T(n+1) \leq t)$!

(c) Fejezze ki $T(n)$ eloszlásfüggvényét az $N(t)$ eloszlásának segítségével!

(d) Tegyük fel, hogy egy ezredmásodperc alatt $p = \frac{1}{500}$ valószínűséggel érkezik alfa-részecske, a múlttól függetlenül. Határozza meg $T(n)$ és $N(t)$ eloszlását!

(e) Milyen abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változóval közelítsük a számlálóberendezés két egymás utáni ugrása közt eltelt időt?

(f) Adjon $T(3)$ eloszlásfüggvényére egyszerű közelítő formulát a (c) pont és a Binomiális eloszlás Poisson-approximációja segítségével. Milyen (nevezetes) abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye ez?

11.3. *A felújítási paradoxon*

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független és X-el azonos eloszlású, pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változók (ú.n. felújítási idők), és tegyük fel hogy $\mathbf{P}(X \leq M) = 1$ valamilyen $M \in$ N-re. Legyen $1 \leq x \leq M$-re $p_x := \mathbf{P}(X = x)$. $T_0 = 0$, $T_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ (felújítási időpontok). Legyen α_n a legutóbbi felújítás óta eltelt idő az n időpontban, β_n pedig a következő felújítási időpontig hátralevő idő (és ha $n = T_k$ maga egy felújítási időpont, akkor legyen $\alpha_n = 0$, $\beta_n = X_{k+1}$). Legyen $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ annak a felújítási intervallumnak a hossza, amibe n beleesik.

(a) Mutassa meg, hogy $Y_n := (\alpha_n, \beta_n)$ Markov láncot alkot. Milyen feltétel kell, hogy teljesüljön X eloszlására, hogy a Markov lánc aperiodikus legyen?

(b) Számítsa ki a Markov lánc stacionárius eloszlását: Jelöljük $\alpha_\infty, \beta_\infty, \gamma_\infty$-vel a stacionárius állapotban az eltelt, hátralevő és teljes időt. Lássa be, hogy $\pi(\alpha_\infty = x, \beta_\infty = y) = \frac{p_{x+y}}{\mathbf{E}(X)}$.

(c) Lássa be az előző részfeladat eredményéből, hogy $\mathbf{P}(\gamma_\infty = x) = \frac{xp_x}{\mathbf{E}(X)}$. Ezt hívják a felújítási idők eloszlásából vett hossz-torzított mintának. Az a felújítási paradoxon, hogy egy kései időpont felújítási intervallum-hosszának az eloszlása nem egyezik meg a felújítási intervallumok hosszának eloszlásával.

(d) Lássa be, hogy $\mathbf{E}(\gamma_\infty) > \mathbf{E}(X)$. Segítség: $\mathbf{E}(\gamma_\infty) - \mathbf{E}(X) =?$

(e) A stacionárius állapotban mi $\mathbf{P}(\alpha_\infty = y|\gamma_\infty = x)$, azaz rögzített γ_∞ mellett mi az α_∞ feltételes eloszlása?

(f) Markov láncok bevezetése nélkül, heurisztikusan is kiszámítható, hogy $\mathbf{P}(\gamma_\infty = x) = \frac{xp_x}{\mathbf{E}(X)}$: legyen $1 \ll n$. A nagy számok törvénye segítségével saccolja meg, hogy körülbelül hány felújítás volt n-ig. Körülbelül hány volt ezek közül x hosszú? Mennyi az x hosszú intervallumok összhossza? Ha egyenletes eloszlással választok az $1, \dots, n$ időpontok közül, akkor a választott intervallum hossza kábé mekkora valószínűséggel lesz x?

11.4. *(Laplace transzformált módszer)* A 1 feladat jelölései mellett legyen még: $N_t = \max\{n \geq 1 | Z_n \leq t\}$ ill. $U(t) = \mathbb{E}N_t$, továbbá $F(x) = \mathbb{P}(T_j < x)$, $f(x) = F'(x)$, $\phi(\lambda) = \mathbb{E}\exp(-\lambda T_j)$. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} U'(t) dt = \frac{\phi(\lambda)}{1 - \phi(\lambda)}$$

11.5. (folytatás) Tegyük fel, hogy a felújítási idők eloszlása Gamma(2,1), azaz $f(t) = te^{-t}$, ha $t \geq 0$. Igazoljuk, hogy

(a)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} U'(t) dt = \frac{1}{\lambda(\lambda + 2)} = \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2(\lambda + 2)}$$

(b)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} \frac{1}{2}(1 - e^{-2s}) ds = \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2(\lambda + 2)}$$

(c) Számoljuk ki $U(t)$-t.

11.6. (folytatás) Oldjuk meg az előbbi feladatot arra az esetre, amikor $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}3e^{-3t}$. Miért kapunk $\frac{3}{2}$ aszimptotikus rátát 2 helyett?

11.7. (folytatás) Tegyük fel, hogy a felújítási idők eloszlása két exponenciális keveréke: ezek p valószínűséggel μ_1 és 1-p valószínűséggel μ_2 paraméterűek. Mutassuk meg, hogy $U(t) = At + C(e^{-rt} - 1)$. Határozzuk meg itt a paraméterek értékeit.

11.8. A felújítások eloszlásfüggvénye nyilván meghatározza az $U(t)$ függvényt. Mutassuk meg, hogy ez megfordítva is igaz.

11.9. *(CHT felújítási folyamatokra)* Legyenek $\tau_1, \tau_2, \dots$ egymásutáni események közötti független és azonos eloszlású várakozási idők, melyeknek várható értéke $\mathbf{E}(\tau_i) = m \in (0, \infty)$ és szórásnégyzete $\mathbf{Var}(\tau_i) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Legyen $\nu_t := \max\{n : \sum_{i=1}^n \tau_i < t\}$ a $[0, t)$ időintervallumban bekövetkezett események száma. A CHT felhasználásánal bizonyítandó a következő határeloszlás tétel:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu_t - \frac{t}{m}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{m^3}}} < x\right) = \Phi(x).$$

ahol Φ az $N(0,1)$ eloszlás eloszlásfüggvénye.