Sztochasztikus folyamatok. 2008/2009 2. félév
Dr. Szász Domokos
7. feladatsor
Poisson folyamat

7.1. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek sűrűségfüggvénye xe^{-x}, ha $x \geq 0$, és 0 egyébként. Legyen továbbá $S_0 = 0$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, valamint legyen $N(t) = \max\{n : S_n < t\}$

(a) Adja meg S_2 sűrűségfüggvényét!

(b) Határozza meg $N(t)$ eloszlását, azaz $k = 0, 1, 2, \ldots$-ra $\mathbf{P}(N(t) = k)$ értékét! (Számolás nélkül is megy, az előadáson tanultakra kell hivatkozni)

7.2. Van két kutya (egy vizsla és egy labrador), és közöttük ide-oda ugrál négy bolha. Minden bolha a többitől függetlenül λ rátával ugrik át az egyik kutyáról a másikra. Kezdetben a vizslán van mind a négy bolha. Határozza meg a t időpontban a vizslán levő bolhák számának eloszlását.

7.3. Tekintsünk a számegyenesen egy λ paraméterű homogén Poisson folyamatot, jelöljük $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$-vel a folyamat pontjainak koordinátáit (az egymásutáni események bekövetkezésének időpontjait). Képezzünk ebből egy újabb pontfolyamatot a következő módon: az eredeti Poisson folyamatban az egymás utáni események történési időpontjai közötti intervallumok felezőpontjaiba leteszünk egy-egy pontot, majd töröljük az eredeti Poisson folyamat pontjait. Azaz: az új follyamat pontjainak koordinátái: $S_i = (T_{i-1} + T_i)/2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.
(a) Poisson folyamat lesz-e az így képezett pontfolyamat?
(b) Mi lesz az újonnan képezett folyamat egymásutáni pontjai közötti időtartam hosszának e, várható értéke és szórása?
(c) Határozzuk meg két egymásutáni ilyen intervallum-hossz kovarianciáját és korrelációhányadosát.
(d) Bizonyítsuk be, hogy két nem egymásutáni intervallum hossza független egymástól.

7.4. Egy telefonközpontba a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 4 hívás.
(a) Mi a valószínűsége annak, hogy az első órában kettőnél kevesebb hívás érkezik?
(b) Feltéve, hogy az első órában hat hívás érkezik, mi annak a valószínűsége, hogy a második órában legalább két hívás érkezik?
(c) A központ kezelője reggeli munkakezdéskor úgy dönt, hogy megvárja a tizenötödik beérkező hívást, majd elmegy ebédelni. Mennyi az ebédjéig kivárandó idő várható értéke?
(d) Feltéve hogy pontosan nyolc hívás érkezik az első két órában, mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan öt érkezik az első órában?
(e) Feltéve, hogy pontosan k hívás érkezik az első négy órában, mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan j érkezik az első órában?

7.5. Hogy ott mindig világosság légyen, ablaktalan folyosónk lámpájába azonnal becsavarjuk az új égőt, ha az előző kiég. Az izzók élettartamai egymástól függetlenek, és külön-külön exponenciális eloszlást követnek λ paraméterrel. $t = 0$-kor csavarjuk be az első égőt. Tekintsük annak az izzónak a teljes élettartamát, amelyik a t időpillanatban ég ($t > 0$ fix). Mennyi ennek a teljes élettartamnak a várható értéke,

(a) Ha tudjuk, hogy a 0 időponttól számítva ez az izzó a k -adik.

(b) Ha nem tudjuk, hogy hányadik. $t \to \infty$ esetén mihez konvergál a t-edik időpontban égő villanykörte teljes élettartamának várható értéke?

7.6. Legyen adva egy λ paraméterű Poisson folyamat. Feltéve, hogy a $[0, t)$ intervallumba esik pont, számítsuk ki az első pont koordinátájának ét.

7.7. Tekintsünk egy homogén, λ paraméterű Poisson folyamatot, és legyen $X(a, b)$ az (a, b) intervallumban lévő pontok száma. Határozza meg $\mathbf{Cov}(X(a, b), X(c, d))$ értékét!

7.8. Tekintsünk n független $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ paraméterű Poisson folyamatot. Képezzünk ezekből egy újabb pontfolyamatot, melynek pontjai az előbbi független Poisson folyamatok pontjainak uniója. Igazoljuk, hogy az így definiált pontfolyamat szintén Poisson, melynek paramétere $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

7.9. Az A és B üzletbe a vásárlók X_t, illetve Y_t független Poisson folyamatok szerint érkeznek, melyeknek paramétere λ, illetve μ. (Az időt órákban mérjük.) Mindkét üzlet reggel nyolckor nyit.
(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy reggel előbb érkezik vásárló az A üzletbe, mint a B-be?
(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a nyitás utáni első két órában a két üzletbe együttesen pontosan négy vásárló érkezik?
(c) Feltéve, hogy a két üzletbe együttesen a nyitás utáni első két órában összesen négy vásárló érkezett, mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek mindegyike az A üzletbe ment?
(d) Jelöljük T-vel a B üzletbe belépő első vásárló érkezésének (véletlen) idejét. Ekkor X_T azon vásárlók száma, akik az A üzletben jártak *mielőtt* az első vásárló a B üzletbe betette volna a lábát. Írjuk fel az X_T valószínűségi változó eloszlását. Számítsa ki a megoldást kétféleképp is: a folytonos teljes valószínűség tételével (azaz integrálással), illetve az adódó nevezetes eloszlás definiáló tulajdonságának belátásával.

7.10. *Miért érdemes megvárni a következő metrót?*

A 4-es metrók és az utasok is Poisson folyamat szerint érkeznek a Gellért téri megállóba, a metrók átlagosan 5 percenként jönnek, az utasok átlagosan 1 másodpercenként. A metró már régóta működik, éjjel-nappal egyfolytában.

(a) Megérkeztem a megállóba, hagyom elmenni a következő metrót, majd az azután következőre felszállok (az összes többi utas az első metróra száll, amit meglát). Mi a velem együtt felszálló utastársaim számának várható értéke, eloszlása?

(b) Megérkeztem a megállóba (a többi utastól függetlenül), és felszállok az első metróra. Mi a velem együtt felszálló utastársaim számának várható értéke, eloszlása (azaz mekkora a valószínűsége, hogy pontosan k másik utassal utazom együtt)?

7.11. Az A és B telefonokhoz a hívások X_t, illetve Y_t független Poisson folyamatok szerint érkeznek, melyeknek paraméterei λ, illetve μ. Legyen $Z_t := X_t + Y_t$ a két telefonhoz *együttesen* érkező hívások folyamata.
(a) Mutassuk meg, hogy Z_t is Poisson folyamat. Mennyi a Z_t folyamat paramétere?
(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első hívás az A telefonhoz érkezik?
(c) Jelölje T azt a (véletlen) időt, amikor az első hívás érkezik a későbben megszólaló telefonhoz. Tehát: T az a legkorábbi időpont, amikor már hívás érkezett mindkét telefonhoz.

Írjuk fel a T valószínűségi változó ét (sok szenvedés árán, aszerinti esetszétválasztással, hogy melyik csörgött előbb, különböző paraméterű exponenciális eloszlások konvolúciójával) és eloszlásfüggvényét (szenvedés nélkül).