Sztochasztikus folyamatok. 2008/2009 2. félév
Dr. Szász Domokos
9. feladatsor
Folytonos idejű Markov-láncok

9.1. Legyen G egy véges állapotterű, irreducibilis, folytonos idejű Markov lánc infinitezimális generátora. Ekkor a G mátrix átlós elemei negatívak, nem-átlós elemei nem-negatívak és sorösszegei nullák.
(a) Legyen a olyan pozitív szám, amely (szigorúan) nagyobb a G mátrix minden átlós elemének abszolút értékénél. Legyen $P := a^{-1}G + I$. Mutassuk meg, hogy P ugyanazon véges állapottér feletti irreducibilis és aperiodikus diszkrét idejű Markov lánc átmenet valószínűségeinek mátrixa.
(b) A (a)-beli eredmény felhasználásával bizonyítsuk be, hogy a G mátrixnak 0 egyszeres sajátértéke, melyhez tartozó baloldali sajátvektor (sorvektor) valószínűségi eloszlás az állapottéren és G minden további sajátértékének negatív a valós része.

9.2. Legyen N_t egy λ paraméterű Poisson-folyamat és X_n egy diszkrét idejű Markov lánc az S véges állapottéren, aminek átmenetvalószínűség-mátrixa Q, azaz $Q_{i,j} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$. Tekintsük az $Y_t = X_{N_t}$ folytonos idejű Markov láncot.

(a) Legyen $i, j \in S$-re $P^t_{i,j} = \mathbf{P}(Y_t = j \mid Y_0 = i)$. Fejezze ki a P^t mátrixot Q és t függvényeként.
(b) Előállítható-e minden folytonos idejű véges állapotterű Markov-lánc ilyen alakban?
(c) Legyen $S = \{1, 2\}$, $\lambda = 2$, $Q_{1,1} = \frac{1}{2}, Q_{1,2} = \frac{1}{2}, Q_{2,1} = \frac{1}{3}, Q_{2,2} = \frac{2}{3}$. Határozza meg azoknak a $\hat{\lambda}$ paramétereknek a halmazát, amikhez van olyan $\hat{Q}$ átmenetmátrix, hogy az $\hat{Y}_t = \hat{X}_{\hat{N}_t}$ folytonos idejű Markov lánc $\hat{P}^t_{i,j} = \mathbf{P}(\hat{Y}_t = j \mid \hat{Y}_0 = i)$ átmenetvalószínűség-mátrixaira $\hat{P}^t = P^t$ teljesül minden $t \geq 0$-ra!

9.3. Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc a $\{1, 2\}$ állapottéren, melynek ugrási rátái: $\lambda(1 \to 2) = 1$, illetve $\lambda(2 \to 1) = 4$.

(a) Írjuk fel az átmenet valószínűségek P^t félcsoportját.
(b) Ha $X_0 = 1$, akkor mi X_t eloszlása? Körülbelül mekkora legyen t, hogy X_t eloszlása 10 tizedesjegyig egyezzen a stacionárius eloszlással?

9.4. Egy üzemben 5 gép és 5 szerelő van. A gépek hibátlan üzemelésének ideje 1 paraméterű exponenciális eloszlású. Ha egy gép elromlik, akkor egy szerelő azonnal elkezdi javítani a gépet. A szerelés ideje exponenciális eloszlású 2 paraméterrel. A működési és szerelési idők függetlenek egymástól, eredetileg minden gép működik. Határozza meg a t időpontban működésben levő gépek számának eloszlását, azaz annak a valószínűségét, hogy t-kor pontosan k gép üzemel, $k = 0, \ldots, 5$.

9.5. Legyen X_t irreducibilis folytonos idejű Markov lánc egy véges vagy megszámlálható S állapottéren. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\alpha, \beta \in S$ és $t > 0$ esetén $\mathbf{P}(X_t = \beta | X_0 = \alpha) > 0$.

9.6. Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc az $S = \{1, 2, 3, 4\}$ állapottéren, melynek infinitezimális generátora

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Írjuk fel az X_t Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlását.
(b) Tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul. Mennyi az első ugrásig eltelt idő várható értéke?
(c) Újból tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul. Mennyi a 4 állapot első elérési idejének várható értéke?

9.7. Egy üzemben 3 gép és 2 szerelő van. A gépek hibátlan üzemelésének ideje λ paraméterű exponenciális eloszlású. Ha egy gép elromlik, és van legalább egy szabad szerelő, akkor egy szerelő azonnal elkezdi javítani a gépet. Ha nincs szabad szerelő, akkor várni kell addig, ameddig valamelyik szerelő felszabadul. A szerelés ideje exponenciális eloszlású 2λ paraméterrel. A működési és szerelési idők függetlenek egymástól. Legyen $X(t)$ a t -kor működő gépek száma ($t > 0$).

(a) Adja meg ennek a folyamatnak az infinitezimális generátorát!

(b) Nagy idő eltelte után kb. mennyi a valószínűsége annak, hogy egy adott pillanatban pontosan k gép üzemel ($k = 0, 1, 2, 3$) ?

9.8. Egy pénzváltó irodához 3 -paraméterű homogén Poisson folyamat szerint érkeznek az ügyfelek. Az irodában egyetlen kiszolgáló dolgozik, és egy-egy ügyfél kiszolgálásának az időtartama 5 -paraméterű exponenciális eloszlást követ. Az iroda olyan kicsi, hogy egyidejűleg csak 2 ügyfél lehet az irodában. Ha az iroda tele van, akkor az újabb ügyfelek a konkurens céghez mennek. Az iroda nyitásától számítva sok idő eltelte után érek oda.

(a) Mi a (közelítő) valószínűsége annak, hogy az irodában van hely a számomra?

(b) Tegyük fel, hogy bejutok az irodába. Emellett a feltétel mellett az irodában eltöltött időmnek mennyi a várható értéke, és

(c) mi az időtartam eloszlásának a sűrűségfüggvénye?

9.9. Legyen $n = 1, 2, \ldots$-re $\mathbf{P}(\nu = n) = (1 - p)^{n-1}p$ és legyenek $X_1, X_2, \ldots$ azonos eloszlású $EXP(\lambda)$ eloszlású valószínűségi változók, és legyen minden mindentől független. Lássa be Poisson-folyamatok felhasználásával, hogy a $\sum_{n=1}^{\nu} X_n$ véletlen tagszámú összeg is exponenciális eloszlású!

9.10. Egy boltba λ -paraméterű homogén Poisson folyamat szerint érkeznek a vásárlók. A boltban egyetlen eladó dolgozik. Egy-egy ügyfél kiszolgálásának az időtartama μ-paraméterű exponenciális eloszlást követ, $\mu > \lambda$. Sok idő eltelte után betoppanok én és beállok a sorba. Mi az eloszlása annak az időtartamnak, amit a boltban töltök? *Útmutatás:* Használja az előző feladat eredményét.

9.11. *A Yule-folyamat*

Egy petricsészében $t = 0$-kor van egy amőba. Egy amőba $EXP(1)$ idő elteltével kettéosztódik, és lesz belőle két ugyanolyan amőba, mint az eredeti. Lássa be, hogy a t időpontban a petricsészében lévő amőbák $X(t)$ száma $GEO(e^{-t})$ eloszlású (az a fajta geometriai, amikor nemcsak a kudarcokat számoljuk, hanem beleszámítjuk a sikeres próbálkozást is).

(a) Először lássa be oly módon, hogy felírja az $X(t)$ folyamat infinitezimális generátorát, és leellenőrzi, hogy az amőbák eloszlásának időbeli fejlődésére felírható differenciálegyenlet-rendszert és a $\mu_k(0) = \delta_{k,1}$ kezdeti feltételt valóban kielégítik a $\mu_k(t) = (1-e^{-t})^{k-1}e^{-t}$ függvények.

(b) Majd annak a felhasználásával, hogy ha $U_1, \dots, U_n$ független és $EXP(1)$ eloszlású valószínűségi változók, akkor $\max\{U_1, \dots, U_n\}$ ugyanolyan eloszlású, mint a $V_1 + \dots + V_n$ független összeg, ahol $V_i \sim EXP(i)$.