Centrális Határeloszlás Tétel

1. Tétel: (CHT). *Legyenek* $\xi_1, \ldots, \xi_n$, *FAE v.v., amelyekre* $E\xi_i = m$, $D\xi_i = \sigma < \infty$. $(\sigma > 0)$. *Akkor*

$$P\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \to \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, \mathrm{d}y.$$

A CHT-t ebben az általános alakban a 2. félévben bizonyítjuk.

1. Definíció:. *Legyen* a_n, b_n *két számsorozat,* $b_n \neq 0$.

$$a_n = O(b_n) \quad \textit{jelentése:} \quad \sup_n \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \infty,$$
$$a_n = o(b_n) \quad \textit{jelentése:} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

2. Definíció:. *Legyen* $f(x)$, $g(x)$ *két függvény, az* x_0 *pont valamely környezetében értelmezett, és ugyanott* $g(x) \neq 0$.

$f(x) = O(g(x))$ *($x = x_0$ környezetében) jelentése: alkalmas* $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\sup_{\substack{|x-x_0|<\varepsilon \\ x\neq x_0}} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$$

$f(x) = o(g(x))$ *($x = x_0$ környezetében) jelentése:*

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

de Moivre–Laplace tétel

Legyenek $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, FAE v.v., $P\left(\varepsilon_i = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right) = \begin{cases} p \\ q = 1-p \end{cases}$ $(0 < p < 1)$. Mese:

$$P(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = k) = P\left(\frac{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \sim \varphi(x_k). \frac{1}{\sqrt{npq}} = \varphi(x_k) h$$

ahol $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $h = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$.

Stirling Formula

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{1}{12n+1}} \le n! \le \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{1}{12n}}$$

Megjegyzés: korábbi bizonyításunkból csak annyi következett, hogy a formula igaz valamely $\tilde{\pi}$ konstanssal (π helyett). A $\tilde{\pi} = \pi$ egyenlőség a MLT következménye lesz.

Következmény:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\tilde{\pi} n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Jelölje $S_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$. S_n eloszlása $B(n,p)$, $ES_n = np$, $DS_n = \sqrt{npq}$. Továbbá: $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\delta_k = k - np = x_k \sqrt{npq}$. A Stirling-formula alkalmazásával

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sim$$

$$\sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{np+\delta_k}{e}\right)^{np+\delta_k} \left(\frac{nq-\delta_k}{e}\right)^{nq-\delta_k}} p^{np+\delta_k} q^{nq-\delta_k} \frac{\sqrt{2\tilde{\pi} n}}{\sqrt{2\tilde{\pi}(np+\delta_k) 2\tilde{\pi}(nq-\delta_k)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\pi} npq}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_k}{np}\right)^{np+\delta_k} \left(1 - \frac{\delta_k}{nq}\right)^{nq-\delta_k}}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta_k}{np}\right)\left(1 - \frac{\delta_k}{nq}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\pi} npq}} I \cdot II.$$

Használjuk:

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \qquad && x \to 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + O(x) && x \to 0 \\ e^x &= 1 + O(x) && x \to 0. \end{aligned}$$

Egyrészt

$$\log\left(\frac{1}{I}\right) = (np+\delta_k)\log\left(1+\frac{\delta_k}{np}\right) + (nq-\delta_k)\log\left(1-\frac{\delta_k}{nq}\right) = \frac{x_k^2}{2} + O\left(\frac{\delta_k^3}{n^2}\right).$$

Másrészt

$$II = 1 + O\left(\frac{\delta_k}{n}\right)$$

Tehát

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\pi} npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} \left[1 + O\left(\frac{\delta_k^3}{n^2}\right) + O\left(\frac{\delta_k}{n}\right)\right].$$

Amennyiben $|x_k| \le A_n$ (itt A_n majd tart a ∞-hez), akkor

$$P(S_n = k) = h\varphi(x_k)\left[1 + O\left(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

ezért igaz a

2. Tétel: (de Moivre-Laplace). *Ha* $|x_k| \le A_n$, *és* $\frac{A_n}{n^{1/6}} \to 0$, *akkor*

$$\sup_{|x_k|\le A_n}\left|\frac{P(S_n=k)}{h\varphi(x_k)} - 1\right| = O\left(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\right).$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a fenti tétel igen finom eredmény: az egyébként 0-hoz tartó $P(S_n = k)$ valószínűség finom aszimptotikáját adja $n \to \infty$ esetén. Az ilyen finom állításokat lokális határeloszlástételeknek nevezzük: a normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez való konvergenciáról van szó!

A Moivre–Laplace tétel felintegrálásával könnyen nyerhető a

3. Tétel: (de Moivre–Laplace tétel globális változata). *Fix* $\alpha < \beta$*-ra*

$$P\left(np + \alpha\sqrt{npq} < S_n < np + \beta\sqrt{npq}\right) \to \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\pi}}} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y.$$

Mivel a jobboldalon sűrűségfüggvénynek kell szerepelnie, azért az is adódik, hogy $\tilde{\pi} = \pi$.

A felintegráláshoz jelöljük

$$\varphi_n(x) = \sqrt{npq}P(S_n = [np + x\sqrt{npq}])$$

Egyrészt a Moivre-Laplace-tételből: $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$, másrészt közvetlenül ellenőrizhető, hogy $\sup_{x,n}\varphi_n(x) < \infty$. Így a kis Lebesgue-tételből a globális tétel már adódik.