

Dr. Szász Domokos
Valószínűségszámítás 2. 2007/2008 tavaszi félév
4. feladatsor

Momentum generáló függvények, generátorfüggvény, karakterisztikus függvény

4.1. Legyenek X_1, X_2, X_3, \dots független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) := \mathbf{P}(X_i < x)$. Legyen ν ezektől független, \mathbb{Z}_+ -értékű valószínűségi változó; jelöljük $G(z)$ -vel ν eloszlásának generátorfüggvényét. Mutassuk meg, hogy az $Y := \max\{X_1, X_2, \dots, X_\nu\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = G(F(x))$.

4.2. Legyen $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ahol X_1, X_2, \dots független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek közös generátorfüggvénye $G(z)$, és N tőlük független valószínűségi változó.

(a) Írjuk fel S_N generátorfüggvényét.

(b) Írjuk fel S_N generátorfüggvényét, ha N $\text{POI}(\lambda)$ eloszlású.

4.3. Annak a valószínűsége, hogy a Pistikéék veteményeskertjében n cserebogárpajor van, g_n . A g_n sorozat generátorfüggvénye legyen $P(z)$. Kapáláskor Pistike a pajorokat egymástól függetlenül egyenként p valószínűséggel vágja ketté. Mi a kertben maradt cserebogárpajorok számának generátorfüggvénye, várható értéke és szórása?

4.4. Legyen $X_0 = 1, X_1, X_2, \dots$ Galton–Watson folyamat, $\mathbf{E}(X_1) = \mu, \mathbf{D}^2(X_1) = \sigma^2$. Mutassuk meg, hogy

(a)

$$\mathbf{D}^2(X_{n+1}) = \mu \mathbf{D}^2(X_n) + \mu^{2n} \sigma^2$$

(b)

$$\mathbf{D}^2(X_n) = \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{1 - \mu^n}{1 - \mu}$$

4.5. (Folytatás). Mutassuk meg, hogy $n > m$ esetén $\mathbf{E}(X_n X_m) = \mu^{n-m} \mathbf{E}X_m^2$.

4.6. Legyen $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$ egyszerű szimmetrikus bolyongás \mathbb{Z} -n, azaz $S_n = X_1 + \dots + X_n$, ahol X_1, X_2, \dots független, azonos eloszlásúak, és $\mathbf{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Legyen továbbá $u_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $f_n = \mathbf{P}(S_1, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0)$ ($n = 1, 2, \dots$), $f_0 = 0$, valamint a megfelelő generátorfüggvények legyenek $U(z)$ és $F(z)$.

(a) Mutassuk meg, hogy $U(z) = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

(b) Igazoljuk, hogy

$$U(z) = \frac{1}{1 - F(z)}$$

(Segítség: vegyük észre, hogy $n \geq 1$ -re $u_n = f_1 u_{n-1} + f_2 u_{n-2} + \dots + f_n u_0$. Miért igaz ez utóbbi?)

4.7. Adott az X valószínűségi változó $P(z)$ generátorfüggvénye. Számoljuk ki az $\mathbf{E}(X^3)$ és $\mathbf{E}(X^4)$ momentumokat. Alkalmazzuk a kapott eredményt, ha X $\text{POI}(\lambda)$ eloszlású.

4.8. Az X valószínűségi változó eloszlása $\mathbf{P}(X = k) = p_k$ ($k = 0, 1, \dots$). Legyen $r_k = \mathbf{P}(X \leq k)$, és legyen $R(z)$ az r_k sorozat generátorfüggvénye. Fejezzük ki $R(z)$ -t a $P(z) = \sum_0^\infty p_k z^k$ generátorfüggvény segítségével.

4.9. Hamis kockával n -szer dobva legyen X és Y az összes 1-es illetve 6-os dobások száma. Határozzuk meg a $H(z, w) = \mathbf{E}(z^X w^Y)$ együttes generátorfüggvényt.

4.10. (Folytatás.) Oldjuk meg az előző feladatot, ha a dobások száma maga is egy N valószínűségi változó, amely független a dobássorozattól és eloszlása $\text{POI}(\lambda)$. Mi ekkor X és Y együttes

4.I. (4.4. folytatása.) Mutassuk meg, hogy $n > m$ esetén X_m és X_n együttes generátorfüggvénye

$$P(z_1, z_2) = P_m(z_1 P_{n-m}(z_2)),$$

ahol P_i az X_i generátorfüggvénye

4.II. Tegyük fel, hogy egy Amway-ügynök minden nap (más ügynököktől és más napoktól függetlenül) $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 1, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 2 új ügynököt szervez be, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel egyet sem. Juli néni április elsején reggel kezdi szervezni hálózatát. Mennyi lesz az április 30-án este Juli néni hálózatában tevékenykedő ügynökök számának (Juli néni is beleértve) várható értéke és szórása?

4.III. Legyenek X_1, X_2, \dots független, azonos eloszlású pozitív egész értékű valószínűségi változók $P(z)$ generátorfüggvénnyel, és legyen $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Legyen

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } \exists n, \text{ hogy } S_n = k, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Legyen $v_k = \mathbf{P}(Y_k = 1)$, és legyen $\{v_k\}$ generátorfüggvénye $V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$. Mutassuk meg, hogy $V(z) = \frac{1}{1-P(z)}$

4.IV. Az eddigiektől eltérően most tekintsünk egy egyszerű, de aszimmetrikus bolyongást \mathbb{Z} -n: $p > q = 1 - p$, ahol p a jobbra lépés valószínűsége. Legyen $\beta_n = \mathbf{P}(\exists j > n : S_j = 0)$. Igazoljuk, hogy a β_n sorozat generátorfüggvénye

$$\beta(z) = \frac{(1 - 4pqz^2)^{1/2} - (p - q)}{(1 - 4pqz^2)^{1/2}(1 - z)}$$

4.A. Egy szabályos $2n$ -szög csúcsait találomra párokba szedjük.

- Mi annak a p_n valószínűsége, hogy a csúcspárokat összekötő hűrok a sokszög belsejében nem metszik egymást?
- Mi a $\{p_n\}$ sorozat generátorfüggvényének konvergenciasugara?
- Mi a válasz, ha a sokszög konvex, de nem szabályos?
- Hogyan lehetne általánosítani a feladatot konvex poliéderre?