Dr. Szász Domokos
Valószínűségszámítás 2. 2007/2008 tavaszi félév
6. feladatsor
Karakterisztikus függvények és tulajonságaik. Centrális határeloszlástétel.

6.1. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független $\mathrm{E}(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók és legyen $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Határozzuk meg Y_n karakterisztikus függvényét.

6.2. Legyenek az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek, továbbá legyen

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n = \pm(n+1)) &= \frac{1}{2(n+1)^2}\\ \mathbf{P}(X_n = 0) &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Határozzuk meg $X_1 + X_2 + \cdots + X_m$ karakterisztikus függvényét.

6.3. Az Y valószínűségi változót *korlátlanul osztható*nak nevezzük, ha $\forall n$-re létezik olyan $\psi_n(t)$ karakterisztikus függvény, hogy $\mathbf{E}\left(e^{itY}\right) = [\psi_n(t)]^n$. Mutassuk meg, hogy a $\mathrm{POI}(\lambda)$ és a $\mathrm{N}(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók korlátlanul oszthatók. (N.B.: Y eloszlását is nevezzük korlátlanul oszthatónak.)

6.4. Legyenek $\nu, X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók, és legyen az $X_1, X_2, \ldots$ változók közös karakterisztikus függvénye $\psi(t)$. Határozzuk meg $Y_\nu = X_1 + \cdots + X_\nu$ karakterisztikus függvényét, ha

(a) ν $\mathrm{POI}(\lambda)$ eloszlású
(b) $\mathbf{P}(\gamma = k) = pq^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.
(c) Igazoljuk, hogy az (a)-ban szereplő eloszlás korlátlanul osztható (a definiciót l. előző feladat).

6.5. Ha $\psi(t)$ karakterisztikus függvény, igaz-e, hogy $\mathrm{Re}\,\psi(t)$, illetve $\mathrm{Im}\,\psi(t)$ is karakterisztikus függvény?

6.6. Számoljuk ki a megadott sűrűségfüggvényű eloszlások karakterisztikus függvényeit ($a > 0$):

(a)

$$f(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(a - |x|) & \text{ha } |x| \le a \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

6.7. A Cauchy-eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}$$

Határozzuk meg a Cauchy-eloszlás karakterisztikus függvényét.

6.8. Tegyük fel, hogy $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos Cauchy-eloszlású változók. Határozzuk meg $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ sűrűségfüggvényét.

6.9. Legyenek $X_1, X_2, X_3 \ldots$ független valószínűségi változók, $X_1, X_3, X_5, \ldots$ eloszlásfüggvénye F, $X_2, X_4, X_6, \ldots$ eloszlásfüggvénye G. Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(X_1) = m_1$, $\mathbf{E}(X_2) = m_2$, $\mathbf{D}^2(X_1) = \mathbf{D}^2(X_2) = \sigma^2$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathbf{E}(X_j))}{\sqrt{n}\sigma} \Rightarrow N(0,1)$$

6.10. Péter reggelente busszal jár munkába. A busz a napok 10%-ában 5 percet, 40%-ában 10 percet, 50%-ában 15 percet késik. Ha Péter évente 230 reggel utazik a busszal, valószínű-e, hogy összesen 50 óránál több időt tölt várakozással?

6.11. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független, $\mathrm{E}(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \to \infty$, akkor

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} kX_k - \frac{n^2}{4}}{\frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow N(0,1)$$

6.12. Kiszámítandó

$$\lim_{n\to\infty} \underset{\substack{0\le x_j\le 1 \\ x_1+\ldots+x_n<\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n}{12}}}}{\int\cdots\int} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n$$

6.I. Igazoljuk valószínűségszámítási gondolattal a következő azonossságokat:

(a)

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}$$

(b)

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{t}{2^k}$$