Valószínűségszámítás 2
2. feladatlap,
2008 tavasz

1. Mutassa meg, hogy a Raktárkészlet lánc (HF1/9) aperiódikus és irreducibilis.

2. A **Wright-Fisher modell** Markov-lánc a $\{0, 1, \ldots, N\}, N \geq 1$ állapotokon, ahol $0, N$ elnyelő állapotok. Feltéve, hogy $X_0 = i$, mi a valószínűsége, hogy a lánc az N állapotban nyelődik el? *A Wright-Fisher modellben N gén mindegyike A vagy a típusú. Az $n+1$-edik generációban az egyes gének az előző generáció N génje közül bármelyik típusát öröklik egyforma valószínűségekkel. Tehát*

$$p_{i,j} = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}$$

3. A teniszmérkőzésen belül egy játékot az nyer, aki előbb nyer meg 4 pontot, kivéve, ha az eredmény 4:3, mely esetben a játék addig folytatódik, amig valamelyik játékosnak nincs két pont előnye. Egy játékon belül mindig az egyik játékos adogat (az *adogató*), és annak valószínűsége, hogy egy-egy pontot az adogató nyer, mindig 0,6. Mi 3:3-as állásnál annak valószínűsége, hogy az adogató nyeri a játékot? Mi akkor, ha az adogató vezet 4:3-ra? Mi, ha az ellenfele vezet ugyanilyen arányban?

4. (folytatás) Átlagban hány pont szükséges a játék befejezéséhez 3:3-as állásnál?

5. Utópia városában az önkormányzat "ingyen bicikliket az embereknek" programot valósított meg. A biciklik a könyvtárnál (K), a presszónál (P), vagy az Ábécénél (A) vehetők fel. A program vezetője megállapította, hogy a könyvtárnál felvett kerékpárokat 0,2 valószínűséggel a presszónál, 0,3 valószínűséggel az ábécénél adjak le. Ugyanígy a presszónál felvett bicikliket 0,4 valószínűséggel a könyvtárnál, 0,1 valószínűséggel az ábécénél adják le. Végül az ábécénél kölcsönzött kerékpárokat 0,25-0,25 valószínűséggel adják le a könyvtárnál ill. a presszónál. Vasárnap egyenlő számú bicikli van mindegyik helyen.
   (a) Mi kedden az adott helyeken levő kerékpárok hányada?
   (b) Mi ugyanez köveetkező vasárnap?
   (c) Hosszú idő után mi a kerékpárok hányada az egyes helyeken?

6. Esernyő-lánc. A professzornak 3 esernyője van — otthon vagy az egyetemen. Ha esik (reggel, amikor bemegy, vagy este, amikor hazaindul) magához vesz egy ernyőt, ha van éppen (ha nincs megázik). Egy-egy alkalommal az eső valószínűsége 0,2. Legyen X_n az esernyők száma az aktuális helyén.
   (a) Irja fel a Markov-lánc átmeneti mátrixát;
   (b) Hosszútávon az esetek hanyadrészében ázik meg.

7. A Macrosoft cég munkatársai vagy programmozók vagy projekt-menedzserek. Évente a programmozók 20 %-a lép elő menedzserré, 10 %-uktól megválnak, a többi beosztása megmarad. A projekt-menedzserek 5 %-át küldik el, a többi beosztása változatlan. Egy programmozó átlagban hány évig marad meg a cégnél?

8. Véges Markov-lánc i állapotából j elérhető – jelölésben $i \to j$, ha $\exists n > 0$, hogy $p_n(i,j) > 0$. Az i, j állapotok kommunikálnak – jelölésben $i \leftrightarrow j$, ha $i \to j, j \to i$ egyaránt teljesülnek. Mutassuk meg, hogy

   (a) a lényeges állapotok halmazán belül $i \leftrightarrow j$ ekvivalencia-reláció;

   (b) egy-egy osztály elemeinek periódusai azonosak.

9. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független kockadobások sorozata. Jelölje $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, és $T_1 = \min\{n \geq 1 | S_n \equiv 0 \pmod 8\}$, és $T_2 = \min\{n \geq 1 | S_n \equiv 1 \pmod 8\}$. Mennyi $\mathbb{E}T_1$ és $\mathbb{E}T_2$?

10. Az S állapottéren legyen X_n irreducibilis Markov-lánc, amely az i állapotból indul, és átmenetmátrixa $\mathbf{P}$. Jelölje
$$T = \min\{n > 0 | X_n = i\}$$
A j állapotra jelölje
$$r(j) = \mathbb{E}\left(\Sigma_{n=0}^{T-1} \mathbb{I}_{\{X_n = i\}}\right)$$
(nyilván $r(i) = 1$).

    (a) Legyen $\mathbf{r}$ a $r(j)$-kből álló vektor. Mutassa meg, hogy $\mathbf{r}^*\mathbf{P} = \mathbf{r}^*$;

    (b) Mutassa meg, hogy
    $$\mathbb{E}(T) = \Sigma_{j \in S} r(j)$$

    (c) Következtessen arra, hogy $\mathbb{E}(T) = \pi(i)^{-1}$, ahol π az invariáns eloszlás vektora.

I. **Perron-Frobenius tétel** Minden P pozitív elemű mátrixnak létezik egyetlen domináns $\lambda(P)$ sajátértéke, amelyre

   (a) $\lambda(P) > 0$ és $Ph = \lambda(P)h$-ra $h > 0$ (vektoroknál és mátrixoknál az egyenlőtlenségek elemenként értendők);

   (b) $\lambda(P)$ egyszeres;

   (c) minden más κ sajátértékre $|\kappa| < \lambda$;

   (d) P-nek h-n kívül nincs más pozitív sajátvektora.

   Segítség: Jelölje: $l(P) := \{\lambda \geq 0 | \exists x \neq 0, x \geq 0, \text{hogy} Px \geq \lambda x\}$. Mutassuk meg, hogy ha P pozitív, akkor

   (a) $l(P) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$;

   (b) $l(P)$ korlátos;

   (c) $l(P)$ zárt.

   Ezekután legyen $\lambda_{\text{MAX}} := \max\{\lambda | \lambda \in l(P)\}$. Lássuk be, hogy épp ez lesz a $\lambda(P)$ sajátérték.