Valószínűségszámítás 3. 2010/11 1. félév
Dr. Szász Domokos
1. feladatsor
Borel–Cantelli-lemma és a nagy számok erős törvénye. I.

1.1. Bizonyítsa be a következő relációkat:

(a)
$$\liminf A_n \subset \limsup A_n$$

(b)
$$\limsup(A_n \cap B_n) \subset (\limsup A_n) \cap (\limsup B_n)$$

(c)
$$(\limsup A_n) \cup (\limsup B_n) = \limsup(A_n \cup B_n)$$

(d)
$$(\liminf A_n) \cap (\liminf B_n) = \liminf(A_n \cap B_n)$$

(e)
$$(\liminf A_n) \cup (\liminf B_n) \subset \liminf(A_n \cup B_n)$$

1.2. Azt mondjuk, hogy az $\{A_n\}_n$ eseménysorozat konvergál az A eseményhez, ha $\liminf A_n = \limsup A_n = A$. Mutassuk meg, hogy

(a) $A_n \to A$ és $B_n \to B$ együtt maguk után vonják, hogy $A_n \cup B_n \to A \cup B$ és $A_n \cap B_n \to A \cap B$

(b) Milyen értelemben igaz, hogy $A_n \to A$ akkor és csak akkor, ha $P(A_n \circ A) \to 0$?

1.3. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy a következő két állítás ekvivalens:

(a) $\mathbf{E}(|X_i|) < \infty$,

(b) $\mathbf{P}(|X_n| > n \text{ végtelen sok } n\text{-re}) = 0$.

1.4. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ tetszőleges valószínűségi változók, és $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pozitív számok. Legyen
$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{ha } |X_n| \le a_n \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_n| \ge a_n) < \infty$$

Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ sor pontosan akkor konvergens, amikor a $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ sor.

1.5. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók, melyeknek eloszlása

$$\mathbf{P}(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{n^2}, \qquad \mathbf{P}(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Bizonyítandó, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $\mathbf{E}(X_n) = 0$, ám majdnem biztosan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = -1$$

1.6. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók, melyeknek eloszlása

$$\mathbf{P}(X_n = n) = \mathbf{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log n}, \qquad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}$$

Mutassuk meg, hogy teljesül a nagy számok gyenge törvénye, viszont az erős törvény nem.

1.7. Az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók empirikus eloszlásfüggvényének az

$$F_n(x,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,x)}(X_k(\omega))$$

eloszlásfüggvényt nevezzük, ahol $\chi_{(-\infty,x)}$ jelöli a $(-\infty, x)$ intervallum indikátorfüggvényét. Mutassuk meg, hogy $F_n(x)$ valóban eloszlásfügvény.

1.8. Jelölje $N \in [0,1]$ a normális számok részhalmazát. Mutassuk meg, hogy mind N, mind $\overline{N}$ sűrű $[0,1]$-ben.

1.9. Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ független események. A $\sum P(A_n)$ és $\sum P(\overline{A_n})$ sorok konvergenciájára vonatkozólag négy eset lehetséges. Adja meg mind a négy esetben a $P(\liminf A_n)$ és $P(\limsup A_n)$ valószínűségeket.

1.10. A $[0,1]$ intervallumot m darab diszjunkt $p_1, \ldots, p_m$ hosszúságú részintervallumra osztjuk. A felosztás *entrópiája*

$$h = -\sum_{j=1}^{m} p_j \log p_j.$$

Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyek eloszása $E[0,1]$, továbbá jelölje $Z_n(j)$ az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók közül azok számát, amelyek a felosztás j-edik elemébe esnek. Mutassuk meg, hogy

$$R_n = \prod_{j=1}^{m} p_j^{Z_n(j)}$$

-re teljesül $\mathbf{P}(n^{-1}\log R_n \to -h) = 1$.

1.11. A $T_1, T_2, \ldots$ időpontokban katasztrófák következnek be, ahol $T_j = X_1 + X_2 + \ldots X_j$ és $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független és azonos eloszlású pozitív valószínűségi változók. Legyen $N(t) = \max\{n : T_n \le t\}$ a t időpont előtt bekövetkezett katasztófák száma. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{E}X_1 < \infty$ és $t \to \infty$, akkor $N(t) \to \infty$ valamint $N(t)/t \to 1/\mathbf{E}X_1$ majdnem biztosan.

1.I. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független valószínűségi változók és legyen $EX_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Ha $\sum_n D^2 X_n < \infty$, akkor $P(\sum_n X_n \text{ konvergál }) = 1$.

1.II. Legyen a $[0,1]$ intevallumba eső x valós szám diadikus előállítása $x = (0, \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \varepsilon_3(x), \ldots)$. A Rademacher-függvények definiciója: $r_n(x) = 2\varepsilon_n(x) - 1$. Legyenek $X_n(x) = a_n r_n(x)$ valószínűségi változók (függvények) a $[0,1]$ intervallumon. Mutassuk meg, hogy ha $\sum_n a_n^2 < \infty$, akkor $P(\sum_n X_n \text{ konvergál }) = 1$.

1.III. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független valószínűségi változók, amelyek a $-n^4, 0, n^4$ értékeket veszik fel rendre $n^{-2}, 1-2n^{-2}, n^{-2}$ valószínűségekkel. Mutassuk meg, hogy $P(\sum_n X_n \text{ konvergál }) = 1$.

1.A. Legyenek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen vektorok $\mathbb{R}^d$-ben, nevezetesen

$$\mathbf{P}(\varepsilon_j = \pm e_k) = \frac{1}{2d} \qquad (k = 1, 2, \ldots, d)$$

Vezessük be az $S_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$ jelölést.

(a) Mutassuk meg, hogy $d = 2$ esetén

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\pi n} \qquad n \to \infty$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy $d = 2$ esetén

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0 \text{ végtelen sok } n\text{-re}) = 1$$

(c) Mennyi a

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0 \text{ végtelen sok } n\text{-re})$$

valószínűség $d = 3$ esetén?

1.B. (Kolmogorov $0 - 1$ törvény.) Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független valószínűségi változók. Jelölje $\mathcal{F}_n$ az $X_n, X_{n+1}, \ldots$ valószínűségi változók által generált σ-algebrát és legyen $\mathcal{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Igazoljuk, hogy $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbf{P}(A)$ értéke vagy 0 vagy 1.

1.C. (Glivenko–Cantelli-tétel) Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots$ FAE és eloszlásfüggvényük F. Legyen $D_n(\omega) = \sup_x |F_n(x, \omega) - F(x)|$. Igazoljuk, hogy $\mathbf{P}(D_n \to 0) = 1$.