Valószínűségszámítás 3. 2010/11 1. félév
Dr. Szász Domokos
4. feladatsor
Gyenge konvergencia, feszesség.

Az alábbiakban az X, X_i $(i \geq 1)$, Y, Y_i $(i \geq 1)$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit rendre F, F_i, G, G_i jelölik.

4.1. Bizonyítsuk be, hogy ha $F_n \Rightarrow F$ és $F_n \Rightarrow G$, akkor $F = G$.

4.2. Bizonyítsuk be, hogy ha $F_n(x) \to F(x)$ $\mathbb{R}$ valamely sűrű részhalmazán, akkor $F_n \Rightarrow F$.

4.3. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ FAE valószínűségi változók, továbbá $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}, S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Jelölje H_n az $\frac{S_n}{n}$ v.v. eloszlásfüggvényét, és legyen

$$\delta(x) = \delta_0(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy $H_n \Rightarrow \delta$.

4.4. Tegyük fel, hogy $F(x)$ folytonos és szigorúan monoton. Mutassuk meg, hogy az $F(X)$ v.v. $E[0, 1]$ eloszlást követ.

4.5. Igazoljuk, hogy tetszőleges F eloszlásfüggvényhez létezik olyan $\{F_n\}$ eloszlásfüggvény sorozat, melyre $F_n \Rightarrow F$, és minden n-re

(a) F_n folytonos, illetve

(b) F_n konstans minden $\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] : k \in \mathbb{Z}$ intervallumban.

4.6. Tegyük fel, hogy $X_n \Rightarrow X$ és $L_n \to 0$ (L_n számsorozat). Mutassuk meg, hogy $L_n X_n \Rightarrow 0$.

4.7. Tegyük fel, hogy $X_n \Rightarrow X$ és $X_n - Y_n \Rightarrow 0$. Mutassuk meg, hogy $Y_n \Rightarrow X$.

4.8. Tegyük fel, hogy $F_n \Rightarrow F$ és F folytonos. Mutassuk meg, hogy akkor F_n egyenletesen is tart F-hez, azaz

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to 0 \qquad \text{ha } n \to \infty$$

4.9. Bizonyítsuk be, hogy ha az F_n, F, G_n, G eloszlásfüggvényekre $F_n \Rightarrow F$ és $G_n \Rightarrow G$, akkor $F_n * G_n \Rightarrow F * G$.
(Ha úgy könnyebb, feltehetjük, hogy az F_n-hez tartozó eloszlásnak van sűrűségfüggvénye.)

4.10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges X_n valószínűségi változó sorozathoz léteznek olyan $L_n \neq 0$ konstansok, hogy $L_n X_n \Rightarrow 0$.

4.11. Mutassunk példát arra, hogy sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlások gyengén konvergálnak, ugyanakkor sűrűségfüggvényeik nem konvergálnak.

4.12. Mutassuk meg, hogy az $\mathrm{N}(m_n, \sigma_n)$ eloszlássorozat akkor és csak akkor feszes, ha $\exists M$ és $\exists \Sigma$, hogy $\forall n$-re $|m_n| \leq M, \sigma_n \leq \Sigma$.

4.13. Legyenek μ_n, μ valószínűségeloszlások. Bizonyítsuk be, hogy $\mu_n \Rightarrow \mu$ akkor és csak akkor, ha $\forall$ zárt $F \subset \mathbb{R}$ halmazra $\limsup \mu_n(F) \leq \mu(F)$.

4.I. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ FAE valószínűségi változók F eloszlásfüggvénnyel, és legyen $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(a) Legyen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & x > 0 \end{cases}$$

és jelölje $H_n(x)$ az $M_n - \alpha^{-1} \log n$ v.v. eloszlásfüggvényét. Mutassuk meg, hogy $H_n(x) \Rightarrow \exp[-\exp(-\alpha x)]$.

(b) Legyen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 1 - x^{-\alpha} & x > 1 \end{cases}$$

és jelölje $H_n(x)$ az $n^{-1/\alpha} M_n$ v.v. eloszlásfüggvényét. Mutassuk meg, hogy $H_n \Rightarrow H$, ahol

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \exp[-x^{-\alpha}] & x > 0 \end{cases}$$

(c) Legyen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ 1 - |x|^{\alpha} & -1 < x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

és jelölje $H_n(x)$ az $n^{1/\alpha} M_n$ v.v. eloszlásfüggvényét. Mutassuk meg, hogy $H_n \Rightarrow H$, ahol

$$H(x) = \begin{cases} \exp[-(-x)^{\alpha}] & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

4.II. Az F és G eloszlásfüggvények $\rho(F, G)$ Lévy-távolsága azon ε értékek infimuma, amelyekre $\forall x$-re

$$G(x - \varepsilon) - \varepsilon \le F(x) \le G(x + \varepsilon) + \varepsilon$$

Bizonyítsuk be, hogy

(a) $\rho(F, G)$ metrika az eloszlásfüggvények terén.

(b) $F_n \Rightarrow F$ akkor és csak akkor, ha $\rho(F_n, F) \to 0$.

4.III. Az $X_n : n \ge 1$ illetve X valószínűségi változók eloszlásai legyenek μ_n és μ. Legyen továbbá $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, melynek szakadási ponthalmazát jelölje D_h. ($D_h = \{x | h(x) \text{ nem folytonos } x\text{-ben}\}$). Bizonyítsuk be, hogy ha $\mu_n \Rightarrow \mu$ és $\mu(D_h) = 0$ (feltesszük, hogy D_h mérhető), akkor $h(X_n) \Rightarrow h(X)$.

4.A. Legyen α irracionális szám, és legyen

$$H_n(x) = \frac{1}{n} \left| \{k | 1 \le k \le n, \{k\alpha\} < x\} \right|$$

Mutassuk meg, hogy $H_n(x) \Rightarrow E_{[0,1]}(x)$.

4.B. Legyenek az X_n-ek $[0, 1]$-értékű v.v.-k. Igazoljuk, hogy $F_n \Rightarrow F$ akkor és csak akkor, ha $\forall k \in \mathbb{Z}^+$-ra $\mathbf{E}(X_n^k) \to \mathbf{E}(X^k)$.