Valószínűségszámítás 3. 2010/11 1. félév
Dr. Szász Domokos
5. feladatsor
Karakterisztikus függvények.

1. Definíció.. *Jelölje $S^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ a d-dimenziós tóruszt. A $\chi\colon S^d \to \mathbb{C}$ nem azonosan eltűnő, folytonos függvényt karakternek nevezzük, ha $\forall x, y \in S^d - re$*

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y).$$

5.1. Igazoljuk a következőket:

(a) $\forall\chi$ karakterre $\chi(0) = 1$,

(b) $\forall\chi_1, \chi_2$ karakter-párra $\chi_1\chi_2$ is karakter,

(c) Az összes karakter ilyen alakú:

$$\chi_n(x) = \exp(2\pi i(n, x))$$

ahol $n \in \mathbb{Z}^d$, (Az $\widehat{S^d} := \{\chi_n\colon n \in \mathbb{Z}^d\}$ csoportot *duális csoportnak* nevezzük.)

Segítség: Gondoljuk meg először $d = 1$-re.

(d) $\int\limits_{S^d} \chi_n(x)\mu(dx) = \delta_{0,n}$, ahol $d\mu$ a Lebesgue-mérték,

(e) A karakterek teljes ortonormált rendszert alkotnak $L_2(S^d, \mu)$-ben, ahol a skalárszorzat $\langle\phi, \psi\rangle := \displaystyle\int \phi(x)\bar{\psi}(x)\mu(\mathrm{d}x)$. Speciálisan $\langle\chi_n, \chi_m\rangle = \delta_{n-m}$.

5.2. Az előző feladat állításai közül melyek igazak, ha S^d helyett R^d vagy Z^d-t tekintjük.

5.3. Számoljuk ki a $\mathrm{B}(n, p)$, $\mathrm{GEO}(p)$, $\mathrm{DE}_n[0, 1]$ és a $\mathrm{DE}[-n, n]$ eloszlások karakterisztikus függvényeit.

5.4. Számoljuk ki az $\mathrm{E}[a, b]$, $\mathrm{EXP}(\lambda)$ és $\mathrm{N}(m_1, \sigma_1) * \mathrm{N}(m_2, \sigma_2)$ eloszlások karakterisztikus függvényeit.

5.5. Az X valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy *rácsos* eloszlású, ha alkalmas $a \in \mathbb{R}$, $d > 0$ értékére $P(X \in a + \mathbb{Z}d) = 1$. Jelölje X karakterisztikus függvényét $\psi(t)$.

(a) Mutassuk meg, hogy annak, hogy X rácsos eloszlású legyen, szükséges feltétele az, hogy $\exists t \neq 0 : |\psi(t)| = 1$.

(b) Mutassuk meg, hogy az előbbi feltétel elégséges is.

5.6. Ha $\mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(X > -x)$, akkor azt mondjuk, hogy X eloszlása szimmetrikus. Mutassuk meg, hogy ez akkor és csak akkor áll fenn, ha X karakterisztikus függvénye valós.

5.7. Számoljuk ki a megadott sűrűségfüggvényű eloszlások karakterisztikus függvényeit ($a > 0$):

(a)

$$f(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(a - |x|) & \text{ha } |x| \le a \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

5.8. Az Y valószínűségi változót *korlátlanul osztható*nak nevezzük, ha $\forall n$-re létezik olyan $\psi_n(t)$ karakterisztikus függvény, hogy $\mathbf{E}\left(e^{itY}\right) = [\psi_n(t)]^n$. Mutassuk meg, hogy a POI(λ) és a N$(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók korlátlanul oszthatók. (N.B.: Y eloszlását is korlátlanul oszthatónak nevezzük.)

5.I. Pozitív α, n esetén az

$$f_{\alpha,n}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\alpha x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leqslant 0 \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű eloszlást gamma-eloszlásnak nevezzük. Mutassuk meg, hogy

(a) $\Gamma(n)$ megválasztható úgy, hogy $f_{\alpha,n}$ valóban sűrűségfüggvény legyen,

(b) a gamma-eloszlás korlátlanul osztható (ld. 8. feladat).

5.II. Olyan $\psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket tekintünk, amelyekre $\psi(0) = 1$, $\forall t$-re $\psi(t) \geq 0$ és $\psi(-t) = \psi(t)$.

(a) Tegyük fel, hogy $d_1, d_2, \ldots > 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \infty$, $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq 0$, $\lim_{k\to\infty} s_k = 0$, és végül $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} s_k d_k = 1$. A pozitív tengelyen legyen $\psi(t)$ gráfja konvex töröttvonal, ahol az egymás utáni oldalak iránytangensei: $-s_1, -s_2, \ldots$ és a t-tengelyre vett vetületek hosszai $d_1, d_2, \ldots$. Tehát ψ értéke a $t_k = d_1 + \ldots + d_k$ pontban $1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} s_j d_j$. (Ha $s_n = 0$, akkor a töröttvonalnak csak n éle van.) Igazoljuk, hogy $\psi(t)$ karakterisztikus függvény.

(b) Konstruáljunk olyan karakterisztikus függvényt, amely nem integrálható.

(c) Pólya tétele: Legyen ψ páros, folytonos és konvex $[0, \infty)$-en, és legyen $\psi(0) = 1$. Igazoljuk, hogy ψ karakterisztikus függvény.

(d) Mutassunk két különböző karakterisztikus függvényt: $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$, melyekre $\psi_1(t) = \psi_2(t)$ valamely véges $[-a, a]$ intervallumon.

(e) Adjunk példát olyan $F_1 \neq F_2$, G eloszlásokra, hogy $F_1 * G = F_2 * G$.

5.A. (4.II. folytatás) Mutassunk példát két különböző valós karakterisztikus függvényre: $\psi_1 \neq \psi_2$, hogy $\forall t$-re $|\psi_1(t)| = |\psi_2(t)|$.

5.B. Legyenek X és Y független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mathbf{E}(X) = 0$, $\mathbf{D}^2(X) = 1$. Mutassuk meg, hogy ha $\frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ eloszlása megegyezik X eloszlásával, akkor X és Y normális eloszlásúak.