Valószínűségszámítás 3. 2010/11 1. félév
Dr. Szász Domokos
7. feladatsor
Karakterisztikus függvények.

7.1. Legyenek az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek, továbbá legyen

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n = \pm(n+1)) &= \frac{1}{2(n+1)^2}\\ \mathbf{P}(X_n = 0) &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

(a) Határozzuk meg $X_1 + X_2 + \cdots + X_m$ karakterisztikus függvényét.

(b) Teljesül-e az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozatára a Lindeberg-feltétel?

7.2. (a) Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek és azonos $CAU(0,1)$ Cauchy eloszlásúak. Határozzuk meg az $Y_n := n^{-1}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét.
(b) Mutassuk meg egy példával, hogy abból, hogy valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye egyenlő a tagok karakterisztikus függvényeinek szorzatával, nem következik a tagok függetlensége.

(**Segítség:** a változókat X-szel és Y-nal jelölve, legyen együttes sűrűségfüggvényük

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left[1 + xy(x^2 - y^2)\right] & \text{ha } |x|, |y| \le 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Írjuk fel együttes karakterisztikus függvényüket: $\mathbb{E}e^{i(tX+sY)}$, és ebből $X+Y$ karakterisztikus függvényét.)

7.3. (a) Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ f.a.e. $EXP(1)$ eloszlásúak, továbbá $Y_1, \ldots, Y_n$ függetlenek, $Y_k \sim EXP(k)$. Lássa be karakterisztikusfüggvény-módszerrel, hogy $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\} \sim Y_1 + \cdots + Y_n$. Segítség: azt kell belátni, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{it}{k}} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{it}{k}\right)^{-1}$$

(b) Lássa be, hogy $M_n - \log(n)$-nek van határeloszlása, ahogy $n \to \infty$. (A határeloszlást *Gumbel*-eloszlásnak nevezik).

(c) Számítsa ki a Gumbel-eloszlás momentumgeneráló függvényét.

(d) Legyen $Z_n = Y_n - \frac{1}{n}$. Lássa be a Kolmogorov-lemma segítségével, hogy a $Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ összeg jól definiált. Milyen eloszlású Z?

(e) Lássa be valószínűségszámítási módszerrel az ú.n. Weierstrass-azonosságot:

$$\Gamma(z+1) = e^{-\gamma \cdot z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \cdot e^{\frac{z}{n}}$$

ahol $\Gamma(z)$ a gamma-függvény, γ az Euler-konstans: $\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$

7.4. Bizonyítsuk be a NSZGYT-t a karakterisztikus függvények módszerével.

7.5. Egy kísérlet kimenetelei legyenek az A,B és C események.

$$\mathbf{P}(A) = p, \qquad \mathbf{P}(B) = q, \qquad \mathbf{P}(C) = r; \qquad p + q + r = 1.$$

Végezzük el a kísérletet n-szer egymástól függetlenül. Jelöljük ν_n-nel, ill. μ_n-nel az A, ill. B esemény gyakoriságát. Milyen eloszláshoz tart a $\frac{\nu_n - np}{\sqrt{n}}$ és $\frac{\mu_n - nq}{\sqrt{n}}$ valószínűségi változók együttes eloszlása?

7.6. Legyenek az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók függetlenek, a következő eloszlásokkal $\mathbf{P}\big(X_i = 0\big) = q_i$, $\mathbf{P}\big(X_i = 1\big) = p_i$, $p_i + q_i = 1$. Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Tegyük fel hogy $\sum_{i=1}^{\infty} p_i q_i = \infty$. Bizonyítsunk NSZGYT-t és CHT-t az S_n valószínűségi változó sorozatra.

7.7. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \dots$ független, $\mathrm{E}(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \to \infty$, akkor

$$Y_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} kX_k - \frac{n^2}{4}}{\frac{1}{6} n^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow N(0, 1)$$

7.8. *(CHT felújítási folyamatokra)* Legyenek $\tau_1, \tau_2, \dots$ egymásutáni események közötti független és azonos eloszlású várakozási idők, melyeknek várható értéke $\mathbf{E}\big(\tau_i\big) = m \in (0, \infty)$ és szórásnégyzete $\mathbf{Var}\big(\tau_i\big) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Legyen $\nu_t := \max\{n : \sum_{i=1}^{n} \tau_i < t\}$ a $[0, t)$ időintervallumban bekövetkezett események száma. A CHT felhasználásánal bizonyítandó a következő határeloszlás tétel:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu_t - \frac{t}{m}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{m^3}}} < x \right) = \varPhi(x).$$

ahol $\varPhi$ az $N(0, 1)$ eloszlás eloszlásfüggvénye.

7.9. Egy szabályos érmével végzünk egymás utáni dobásokat mindaddig, amíg a dobások eredményeinek sorzatában mind a fej-, mind pedig az irásdobások száma el nem éri az n számot. Jelölje ν_n a szükséges dobások számát. Meghatározandó a $\big(\nu_n - 2n\big)/\sqrt{2n}$ valószínűségi változó határeloszlása, amint $n \to \infty$. Segítség: bizonyítás közben használhatjuk a CHT-t.