SZÁSZ DOMOKOS

DINAMIKAI RENDSZEREK

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés. Alapfogalmak és példák

Ebben az előadásban dinamikai rendszeren időben *determinisztikusan* fejlődő — diszkrét vagy folytonos idejű — rendszert értünk.

1.1 Definíció. Legyen $(M, \mathcal{F})$ mérhető tér, azaz M az alaphalmaz, dinamikai rendszerünk fázistere, és $\mathcal{F}$ M részhalmazainak $\sigma-$algebrája. Az $(M, \mathcal{F}, T)$ hármast, ahol $T\colon M \to M$, *endomorfizmusnak* nevezzük, ha T mérhető, azaz $\forall A \in \mathcal{F}$-re $T^{-1}A \in \mathcal{F}$.

1.2 Definíció. Az $(M, \mathcal{F}, T)$ hármast, ahol $T\colon M \to M$ *automorfizmusnak* nevezzük, ha T és T^{-1} is endomorfizmusok.

Klasszikus példa dinamikai rendszerre a Naprendszer, amelynek mozgását a tudósok *stabilnak* tekintették. (Tekintsük valamely dinamikai rendszer két adott, infinitézimálisan közeli fázispontjához tartozó pályákat. Attól függően, hogy az időbeli fejlődés során a pályák távolsága — tipikus pályapár esetén — legfeljebb polinomiálisan illetve legalább (pozitív) exponenciálisan vátozik, a rendszert *stabilisnak* illetve *instabilnak* nevezzük.) Megoldani, integrálni azonban csak a két-test problémát sikerült, a három-test problémát azonban nem. Sőt a könnyített változat, az ún. korlátozott három-test probléma is hosszú ideig ellenállt. A *korlátozott három-test problémánál* feltesszük, hogy a három tömegpont közül az egyik tömege elenyészően kicsi; ekkor reális volt a remény, hogy a megoldást megkaphatjuk mint a két-test probléma ismert megoldásának perturbációját.

A közelítés ésszerűségét szemléltethetjük a Vénusz pályájának számolásával. A Vénusz mozgását elsősorban a Nap gravitációs vonzása határozza meg, de csekély hatást a többi bolygó is gyakorol rá. A Nap körüli ellipszispályát elsősorban a Jupiter deformálja, azonban ennek átlagos ereje is kisebb mint a Napénak 2.10^{-5}-szerese. Elsőrendű közelítésben még ezt kell figyelembevennünk, ez éppen a korlátozott három-test-probléma. Finomabb közelítésben azután már a Föld vonzerejével is számolnunk kellene, ez átlagosan a Napénak 4.10^{-6}-szorosa.

Szóval mi is a helyzet a korlátozott három-test-problémánál az általános esetben? A válasz jóval bonyolultabbnak bizonyult a vártnál, amit a három-test problémánál egyszerűbb, de vele rokon példán szemléltetünk.

1.3 Példa. (A körgyűrű forgatása) Tekintsük az $M = [a, b] \times S$ fázistéren a $T(r, \phi) := (r, \phi + f(r))$ automorfizmust, ahol $0 < a < b$ és $f(r)$ szigorúan monoton növekedő C^1 függvény. (Mivel $S = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, azért az (r, ϕ) polárkoordináta szögváltozójában az összeadás mod 1 értelemben szerepel.) Ennek minden $r \in [a, b]$ értékre az $r =$ const. görbe invariáns görbéje (következésképpen a fázistér „fóliázva" van ezekkel), a rendszer stabil. Az $r =$ const. invariáns görbéket *invariáns tóruszoknak* is nevezik; topológiailag ezek egydimenziós tóruszok.

1.4 Példa. (A körvonal forgatása) Az előző példa rögtön egy egyszerűbbet is tartalmaz. Tekintsük az $M = S$ körvonalon az $R_\alpha x = x + \alpha$ automorfizmust (ismét mod 1). Ezt nevezik a *körvonal forgatásának*, és α a forgatási szög. Könnyű látni, hogy racionális α esetén minden pont periodikus, irracionális α esetén minden pálya sűrű (ezt a 2. előadásban bizonyítjuk is).

1.5 Példa. (A körgyűrű diffeomorfizmusa) Visszatérve az 1.3 Példához, a kérdés az, mi történik, ha T helyett a $T_\epsilon := T_\epsilon(r, \phi) := (r + \epsilon\alpha(r, \phi), \phi + f(r) + \epsilon\beta(r, \phi))$ perturbált leképezést vesszük, ahol α és β síma függvények, amelyekkel T_ϵ az M körgyűrű diffeomorfizmusa (azaz az inverz is létezik és differenciálható).

A T_ϵ leképezések tehát a *körgyűrű (az annulus) diffeomorfizmusai* közé tartoznak. Vajon ezeknek is lesznek-e — legalábbis kis ϵ-ra — T-hez hasonlóan M minden pontján keresztül invariáns tóruszai? A válasz, amelyet 1954-ben A. N. Kolmogorov talált, a korábbi várakozáshoz képest rendkívül meglepő volt. A perturbált leképezéseknek valóban megmaradnak bizonyos invariáns tóruszai abban az értelemben, hogy

1. lesznek invariáns Γ görbék, amelyek topológiailag tóruszok,
2. továbbá az ezekre korlátozott leképezésnek az ún. *forgatási száma* (ez a forgatási szög általánosítása, a pontos definiciót l. később) azonos a T automorfizmus valamely $r = r(\Gamma)$ sugárhoz tartozó $f(r)$ forgatási szögével:
3. végül T és T_ϵ azonos forgatási számhoz tartozó invariáns tóruszai egymás alkalmas perturbáltjai.

Mármost, hogy milyen $f(r)$ forgatási szögekhez tartozó invariáns tóruszok maradnak meg, az a szög *számelméleti* tulajdonságaitól függ: minél rosszabbul közelíthető $f(r)$ racionálisokkal, annál nagyobb perturbációnak is ellenáll. Először számítógépes eredmények mutatták, hogy Kolmogorov eredménye az igazságot mutatja abban az értelemben, hogy általában a perturbációnál megmaradó invariáns tóruszok közötti tartományokban tipikusan olyan *kaotikus*, instabil pályák is előfordulnak, amelyek lezártjai pozitív mértékű halmazok. Kolmogorov óriási érdeme a szokatlan, egészen új jelenség észrevétele, és a bizonyítás alapgondolatának megtalálása. Az analitikus, igen nehéz részletek teljes és matematikailag szigorú kidolgozása, és a feltételek lényeges javítása Arnold (1963) és Moser (1962) eredménye, ezért nevezik az elméletet Kolmogorov–Arnold–Moser, röviden KAM-elméletnek. A későbbiekben egy már egyszerűsített bizonyítást ismertetünk.

A számunkra legérdekesebb dinamikai rendszerek közül soknak a matematikai megközelítés számára igen előnyös további tulajdonsága is van: M-en megadható olyan, gyakran az M topológikus tulajdonságaival összhangban levő *mérték*, amelyet a dinamika *invariáns*an hagy. Ez a helyzet pl. a klasszikus mechanika Hamilton-rendszereinél, ahol az un. Liouville-mérték mindig invariáns az időbeli fejlődésre vonatkozólag.

1.6 Definíció. Legyen $(M, \mathcal{F})$ mérhető tér, és rajta adott a μ mérték, amelyet az 1.1 Definició értelmében vett T endomorfizmus invariánsan hagy (azaz: $\forall A \in \mathcal{F}$-re $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$). Az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ négyest ugyancsak endomorfizmusnak nevezzük. A szövegösszefüggésből ki fog mindig derülni, vajon van-e invariáns mérték, avagy nincs, pontosabban gondolunk-e rá avagy nem. Ugyancsak, ha ezt külön nem említjük, a μ mértékről feltesszük, hogy valószínűségi mérték, azaz $\mu(M) = 1$.

1.7 Definíció. Az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ négyest *automorfizmusnak* nevezzük, ha T és T^{-1} is endomorfizmusok.

Az 1.3 és 1.4 Példákban a Lebesgue-mérték invariáns, mig az 1.5 Példában tipikusan nincs síma invariáns mérték.

1.8 Példa. (Gauss-leképezés) Tekintsük az $I := [0, 1)$ egységintervallum következő transzformációját:

$$Tx = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$$

ahol $\{x\} = x - [x]$ az x szám törtrésze. Ez a leképezés nemcsak az 1.1 Definició értelmében endomorfizmus, hanem következő Lemmánk szerint az 1.6 Definició értelmében is.

1.9 Lemma. *A Gauss-leképezésnek van síma invariáns mértéke, amelynek sűrűségfüggvénye*

$$\rho(x) = \frac{1}{(1+x)\log 2}.$$

Bizonyítás. Ha van invariáns mérték, akkor az $(y, y + \mathrm{d}y)$ intervallum mértéke egyrészt $\rho(y)\,\mathrm{d}y$, másrészt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_k)\ |\mathrm{d}x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_k) x_k^2\,\mathrm{d}y$$

ahol $x_k := (k+y)^{-1} : 1 \leq k$ az $y = Tx$ egyenlet megoldásai. Innen

$$\rho(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_k) x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \rho\left(\frac{1}{k+y}\right) \frac{1}{(k+y)^2}.$$

Elemi számolás már adja, hogy a Lemmában szereplő sűrűség megoldja a kapott függvényegyenletet. □

A Gauss leképezés alapvető szerepet játszik a lánctörtek metrikus elméletében.

1.10 Példa. (Intervallumleképezések) Az **??** Példa sugallja a következő leképezéscsalád bevezetését. Legyen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ C^1-függvény, amelyre a $Tx := \{f(x)\}$ módon értelmezett $T\colon [0,1] \to [0,1]$ endomorfizmus végesen invertálható (azaz $\forall y \in [0,1]$-re a $Tx = y$ egyenletnek véges sok megoldása van). Az így bevezetett leképezéseket nevezzük *intervallumleképezéseknek*. Mivel a lehető legalacsonyabb-dimenziósak, ezért — matematikai vagy akár számítógépes — tanulmányozásuk viszonylag egyszerűbb, ugyanakkor már ezek is rendkívül gazdag viselkedést mutatnak. Sőt ugyanez elmondható a még egyszerűbb $f(x) := \mu x(1-x)$ ($\mu > 0$) kvadratikus függvény által definiált családra. Később látni fogjuk, hogy ezen leképezések akkor viselkednek ergodikus, kaotikus, sztochasztikus módon, ha létezik síma invariáns mértékük. A Gauss leképezésnél leírt módon itt is könnyű felírni az esetleg létező invariáns mérték $\rho(y)$ sűrűségfüggvényére az egyenletet. Nevezetesen:

$$\rho(y) = \sum_{x\colon Tx=y} \frac{\rho(x)}{|f'(x)|}$$

A jobboldali operátort (itt nem mondtuk meg, milyen térben értelmeztük) nevezik *Perron–Frobenius–Ruelle-operátornak*, és ennek fixpontja a keresett sűrűség.

A valószínűségszámításból jól ismert az $f\colon [0,1) \to [0,1)$, $f(x) = 2x \pmod 1$ függvény által definiált un. *bináris*- (vagy *diadikus*-) leképezés. Igen fontosak a szakaszonként C^1 f-függvények által értelmezett intervallumleképezések is.

Csak említjük a kétdimenziós analitikus leképezéseket, amelyek, ha lehet, még az intervallumleképezéseknél is gazdagabb viselkedést mutatnak. Egyszerű példa itt is a kvadratikus család: $Tz := z^2 + c$ ahol $c \in \mathbb{C}$ (nyilván $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

További fontos példákkal a következő fejezetekben is megismerkedünk.

Mese a Naprendszerre vonatkozó legújabb szimulációkról.

Az 1994-es párizsi Matematikai Fizikai Világkongresszuson J. Laskar francia kutató meglepő eredményekről számolt be. Lényeges állítása, hogy a Naprendszer jövőbeli fejlődését 100 millió évre előre tudják számolni, és ez egyben elvi korlát is. Igen érdekes elvi újdonság, hogy a stabilnak hitt rendszerben kaotikus oszcillációk is megjelennek. Nevezetesen pl. a Mars forgástengelyének iránya végez ilyet. Ez természetesen az időjárásra is hat, ami erősen csökkenti az élet kialakulásának esélyeit. Ugyanezt a kaotikus oszcillációt mutatta a Föld forgástengelye is, amikor a rendszerből kihagyták a Föld holdját. Ez arra utal, hogy a Föld mozgásának stabilitása, beleértve a Föld forgástengelyének szabályos változását, annak következménye, hogy Földünk viszonylag nehéz Holddal rendelkezik.

Folytonos paraméterű dinamikai rendszerek

Differenciálegyenletekből származtatott dinamikai rendszereknél az idő folytonos. Ezért természetes az egyparaméteres leképezés(fél)csoportok bevezetése.

1.11 Definíció. Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu, T^{\mathbb{R}})$ egyparaméteres automorfizmuscsoport, azaz legyen $\forall t \in \mathbb{R}$-re T^t automorfizmus, és teljesüljön $\forall t, s \in \mathbb{R}$ és $x \in M$-re: $T^{t+s}x = T^t(t^s x)$. $T^{\mathbb{R}}$ folyam, ha $\forall f : M \to \mathbb{R}$ mérhető függvényre $f(T^t x)$ mérhető $M \times \mathbb{R}$-en.

Az előző definicióban az $\mathbb{R}$ paramétertartományt $\mathbb{R}_+$-szal helyettesítve az értelemszerű vátoztatásokkal kapjuk a $T^{\mathbb{R}_+}$ endomorfizmus-félcsoport, másnéven félfolyam fogalmát.

1.12 Példa. (A tórusz feltekerése) Ez a körvonal forgatásának általánosítása. Itt $M := S^d \simeq \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, μ a Lebesgue-mérték, és

$$T^t_\alpha x := x + t\alpha \qquad (\operatorname{mod} S^d)$$

ahol $\alpha \in S^d$ tetszőleges.

Ugyanezt a transzformációt tekinthetjük csak diszkrét időpontokban

$$T^n_\alpha := x + n\alpha \qquad (\operatorname{mod} S^d). \tag{1.1}$$

Ez a *tórusz eltolása*, ami általában a csoport-eltolás speciális esete (l. 3.7 Példa).

Ha lehetséges, mindig érdemes egyszerű mechanikai példákon keresztül szemléltetnünk a bevezetett matematikai modellek jelentését, jelentőségét.

1.13 Példa. (Az inga fázisképe) Tekintsünk egy ℓ hosszúságú fonálra felfüggesztett $m = 1$ tömegű pontszerű tömeget. Jelöljük q-val az inga kitérésének szögét, p-vel momentumát, ami az adott esetben egyben sebessége is. Egyszerű elvekből következően

$$\left[\begin{array}{l} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 \sin q, \end{array}\right. \tag{1.2}$$

ahol $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.

Rendszerünk, amely így is írható:

$$\ddot{q} + \omega^2 \sin q = 0$$

Hamilton-rendszer, és Hamilton-függvénye

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + (1 - \cos q)\omega^2.$$

Valóban

$$\left[\begin{array}{l} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \end{array}\right.$$

és így
$$\frac{\mathrm{d}H(p,q)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = 0$$
miatt $H = H(p(t), q(t))$ mozgásállandó. Tehát az (1.2) egyenlet megoldásai a $H =$ constans görbék mentén változnak. Emellett a q szögváltozó 2π-periódikus, így a fázistér a $(-\infty < p < \infty, 0 \leq q < 2\pi)$ hengerpalásttal azonosítható.

Az (1.2) rendszernek két fixpontja, azaz szinguláris pontja van, vagyis ahol $p = 0$; ezek $(p_1 = 0, q_1 = 0)$, $(p_2 = 0, q_2 = \pi)$ (az első az inga legalsó, a másik a legfelső helyzete). Mindkét fixpont környezetében tekinthetjük e rendszer lineáris közelítését. Ezek
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\binom{p}{q} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\binom{p}{q} = D_1\binom{p}{q} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\binom{p}{q} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\binom{p}{q} = D_2\binom{p}{q}. \end{aligned} \tag{1.3}$$
D_1 sajátértékei: $\lambda_1 = \pm i\omega$, D_2-éi: $\lambda_2 = \pm\omega$.

Az első esetben a linearizált egyenlet valós megoldásai $p(t) = C\omega\cos(\omega t + \varphi)$, $q(t) = C\sin(\omega t + \varphi)$, ezek ellipsziseken változnak $(\frac{1}{\omega^2}p^2 + q^2 = C^2)$, a második esetben $p(t) = C\omega ch(\omega t + \varphi)$, $q(t) = Csh(\omega t + \varphi)$; ezek viszont hiperbolákon változnak $(\frac{1}{\omega^2}p^2 - q^2 = C^2)$.

A lineáris közelítések azonban csak a fixpontok közelében írják le jól a pályákat, globálisan így néz ki a fáziskép:

1. ábra.

Valóban, a $H = H(p,q) = \frac{p^2}{2} + (1 - \cos q)\omega^2$ energia konstans lévén, $H > 2\omega^2$ esetén a mozgás forgás jellegű, p sehol sem lehet nulla, q monoton módon változik; $0 < H < 2\omega^2$ esetén $(p = 0,\ q = \arccos(1 - \frac{H}{\omega^2}))$ pontja az orbitnak, a mozgás lengő jellegű.

$H = 2\omega^2$ esetén a megoldás a $\frac{p^2}{2} = \omega^2(1 + \cos\varphi)$ görbepáron, az ún. szeparatrixon változik. A $(0,0)$ fixpont elliptikus, a $(0,\pi)$ fixpont hiperbolikus, a szeparatrix $(\pi, 0)$-beli érintői épp az (1.3)-ban szereplő D_2 lineáris operátor sajátirányai.

Függelék

Mérhető tér, valószínűségi mező. Ha M tetszőleges nem-üres halmaz, akkor M részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ családját *$\sigma-$algebrának* nevezzük, ha (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$, (ii) minden $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ esetén $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, és végül (iii) ha $A \in \mathcal{F}$, akkor

$A^c \in \mathcal{F}$ (másszóval $\mathcal{F}$ zárt a megszámlálható egyesítés és a komplementerképzés műveleteire nézve). A $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ függvényt *mértéknek* nevezzük, ha tetszőleges $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ esetén $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. A μ mérték *valószínűségi*, ha $\mu(M) = 1$. Az $(M, \mathcal{F})$ pár neve *mérhető tér*, az $(M, \mathcal{F}, \mu)$ hármasé *mértékes tér* (illetve *valószínűségi mező*, ha μ valószínűségi mérték.) Nem jelentős megszorítás, ezért a továbbiakban mindenütt feltesszük, hogy a szereplő *mértékek teljesek*, azaz ha $B \subset A$, és $\mu(A) = 0$, akkor egyúttal $B \in \mathcal{F}$ (és következőleg $\mu(B) = 0$). Ha M topológikus tér (pl. metrikus tér, vagy speciálisan az euklideszi tér), akkor a nyílt halmazok által generált σ-algebra az ún. *Borel σ-algebra.* Ha – Riemann-sokaságok, így pl. ismét az euklideszi tér esetén – az alapul vett mérték a Riemann-mérték, illetve a Lebesgue-mérték — akkor a szóban forgó mértéknek egyetlen legszűkebb teljes kiterjesztése van (az euklideszi esetben a megfelelő σ-algebrát a *Lebesgue σ-algebrának* és az ott értelmezett mértéket pedig *Lebesgue-mértéknek* nevezzük).

Integrálhelyettesítés. A Perron–Frobenius–Ruelle operátor levezetésénél már használtuk és a jövőben is sokszor alkalmazzuk az alapvető integrálhelyettesítési azonosságot. Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu)$ valószínűségi mező, $(M', \mathcal{F}')$ mérhető tér, $f\colon M \to M'$ mérhető leképezés és $\phi\colon M' \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Akkor

$$\int_M \phi(f(x))\mu(\mathrm{d}x) = \int_{M'} \phi(y)\mu(f^{-1}(\mathrm{d}y)) \tag{1.4}$$

áll, valahányszor bármelyik oldalon szereplő integrál létezik.

2. fejezet

Poincaré rekurrencia tétele. Ergodtételek

A legegyszerűbb kérdés, amely már a múlt században is foglalkoztatta a dinamikai rendszerekkel foglalkozó kutatókat: visszatérnek-e előbb-utóbb a fázispontok sajátmaguk kis környezetébe. A periódikus pontok persze ilyenek, de ezekből viszonylag kevés van. Poincaré egyszerű tétele igen általános, mert topológiát sem feltételez.

2.1 Tétel. (Poincaré rekurrencia tétele, 1899) *Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ tetszőleges endomorfizmus, és $A \in \mathcal{F}$. Ekkor A μ-majdnem minden pontja visszatérő, azaz $\mu-$m. m. $x \in A$-ra $\exists n \in \mathbb{Z}_+$, hogy $T^n x \in A$.*

2.2 Következmény. A $\mu-$m. m. pontja erősen is visszatérő, azaz végtelen sokszor visszatér A-ba.

Bizonyítás. Poincaré tétele miatt minden n-re T^n is visszatérő, azaz $\exists B_n$, hogy $\mu(B_n) = 0$ és $A \setminus B_n$-en T^n visszatérő. $A \setminus \bigcup_1^\infty B_n$ pontjai végtelen sokszor térnek vissza A-ba. $\square$

2.1 Tétel bizonyítása. Legyen $N \subset A$ a nem-visszatérő pontok halmaza: $N := A \setminus (\bigcup_{k=1}^\infty T^{-k}A) = A \cap (\bigcap_{k=1}^\infty T^{-k}(M \setminus A))$.

Állítjuk, hogy $\forall n \in \mathbb{Z}_+$-ra $N \cap T^{-n}N = \emptyset$. Valóban, ha $x \in N \cap T^{-n}N$ lenne, akkor $x \in A$ és egyúttal $T^n x \in A$ lenne, így x is visszatérő volna, ellentétben N definíciójával.

Az előbbi állítás következménye: $\forall 0 \leq k < l$-re

$$T^{-k}N \cap T^{-l}N = T^{-k}(N \cap T^{-(l-k)}N) = \emptyset$$

tehát $N, T^{-1}N, \ldots, T^{-n}N, \ldots$ páronként diszjunktak, ezért μ végessége miatt $\mu(N) = 0$. $\square$

Poincaré tételének egyszerű alkalmazása: tekintsük a körvonal forgatását (1.4 Példa). Ha $\alpha = r/s$ racionális, akkor $R_\alpha^s = \mathrm{Id}$, és minden pont periódikus. Tekintsük irracionális α esetét. 2.1 Tételt alkalmazva az $A := (-\delta, \delta)$ halmazra, látjuk, hogy $\exists x \in A$ és $\exists n$, hogy $-\delta < (0 \neq)\ x + n\alpha \pmod 1 < \delta$. Tehát $-2\delta < n\alpha \pmod 1 < 2\delta$. Innen már azonnal adódik, hogy $\forall x \in S$-re a $\{x + n\alpha \pmod 1\}$ halmaz sűrű S-en. (Megjegyezzük, hogy az $\{x + n\alpha \pmod 1\}$ halmaz sűrű volta közvetlenül is könnyen belátható pusztán azt használva, hogy irracionális α esetén e halmaz nem lehet véges.)

Igen gyakran olyan dinamikai rendszereket vizsgálunk, ahol a fázistér topológikus struktúrával is rendelkezik; egyszerűség kedvéért ilyenkor itt mindig felteszzük, hogy M lokálisan kompakt, szeparábilis metrikus tér.

2.3 Definíció. Legyen T endomorfizmus. Az $X \subset M$ részhalmazt *minimális*nak nevezzük, ha nem tartalmaz valódi, nem-üres, zárt, T-invariáns részhalmazt. Ha maga M minimális halmaz, akkor a T-t *minimális endomorfizmus*nak nevezzük. A T endomorfizmust *topológikusan tranzitív*nak nevezzük, ha van olyan $x \in M$ fázispont, amelynek a pályája sűrű M-ben.

Topológikusan tranzitív endomorfizmus nyilván minimális. Előbbi észrevételünk értelmében a körvonal irracionális forgatása topológikusan tranzitív, így minimális is.

Boltzmann ergodikus hipotézise és Neumann ergodtétele

Ludwig Boltzmann a múlt század 70-es éveiben a statisztikus fizika megalapozásán dolgozva megfogalmazta az ún. *ergodikus hipotézist.* Legyen M_N valamely N szabadsági fokú mechanikai rendszer fázistere, és ezen $f_N\colon M_N \to \mathbb{R}$ egy mérés. Rendszerünkről tegyük fel, hogy egyensúlyban van, tehát M_N-en adva van egy μ_N (mikrokanonikus) egyensúlyi, vagyis invariáns mérték (a Liouville mérték). Boltzmann hipotézise szerint, ha rendszerünk nagy ($N \gg 1$), a megfigyelések időbeli átlaga konvergál a térbeli, egyensúlyi átlagértékhez, azaz formálisan

$$1/T \int_0^T f(T^s x)\,\mathrm{d}s \to \int_M f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

hacsak $T, N \to \infty$. Mind a rendszer „nagy” voltára vonatkozó feltevés, mind a használt konvergenciafogalom matematikailag tisztázatlanok voltak. Bármennyire is fontos volt és matematikailag is izgalmasnak tűnt az ergodikus hipotézis, mégis csak több mint 50 év elteltével sikerült megtenni az első igazi lépéseket.

Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ tetszőleges endomorfizmus, és $f\colon M \to \mathbb{R}$ valamilyen „mérés”, azaz a fázistéren értelmezett, alkalmas feltételeknek eleget tevő függvény. Az ergodicitás matematikai modellezéséhez fontos lökést adott Koopman ötlete. A dinamikai rendszereket természetes módon pontleképezésekként értették, mi is így vezettük be a fogalmat. Koopman 1929-ben a következő egyszerű átfogalmazást javasolta: A pontleképezés helyett tekintsük a

$$(\hat{T}f)(x) := f(Tx)$$

– lineáris – függvénytranszformációt, mondjuk az $L_p = \{f\colon \|f\|_p := (\int_M (|f|^p)\,\mathrm{d}\mu)^{1/p} < \infty\}$ függvénytéren. ($\hat{T}$-t a T leképezés által *indukált operátornak* nevezzük.) A μ mérték invarianciájának közvetlen folyománya, hogy $\hat{T}$ izometria, azaz $\|\hat{T}f\|_p = \|f\|_p$ és így $\|\hat{T}\|_p = 1$. Az indukált leképezés objektuma könnyen kezelhető volt a funkcionálanalitikus megközelítés számára, hiszen a funkcionálanalízis a 20-as évek végére, részben éppen Neumann János munkásságának is köszönhetően, jól értett, természetes eszközzé vált a matematikában.

2.4 Megjegyzés. Ha egy $\hat{T}\colon L_p \to L_p$ izometria adott, természetes kérdés, vajon van-e olyan $T\colon M \to M$, amely indukálná $\hat{T}$-t. A válasz általában nem, viszont ha $(M, \mathcal{F}, \mu)$ ún. Lebesgue-tér, akkor igen. A Lebesgue-terek tanulmányozása azonban most nem célunk.

2.5 Tétel. (Neumann L_2-ergodtétele, 1932) *Tetszőleges $f \in L_2$ függvényhez létezik $\bar{f} \in L_2$ invariáns függvény, hogy*

$$\|A_n f - \bar{f}\|_2 \to 0$$

ahol $A_n f = \frac{1}{n}(f + \hat{T}f + \cdots + \hat{T}^{n-1}f)$ (Az $f \in L_p$ függvény invariáns, ha $f = \hat{T}f$.) Igaz továbbá, hogy $\bar{f}$ az f elem L_2-beli ortogonális vetülete az invariáns függvények alterére. Végül $\int f\,\mathrm{d}\mu = \int \bar{f}\,\mathrm{d}\mu$.

2.6 Definíció. A T endomorfizmust *ergodikusnak* nevezzük, ha bármely $f \in L_2$ függvényre $\bar{f} = const.$ (Miután általában az L_p-függvények csak μ-m.m. értelmezettek, azért ezek egyenlőségéről is csak ilyen értelemben beszélünk). Innen azonnal következik, hogy T csak akkor ergodikus, ha minden invariáns függvény konstans.

Ergodikus leképezésre a 2.5 Tétel harmadik állítása miatt $\int f\,\mathrm{d}\mu = \bar{f}$, vagyis az első állítás így szól

$$\frac{1}{n}(f + \hat{T}f + \cdots + \hat{T}^{n-1}f) \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} \int f\,\mathrm{d}\mu.$$

Tehát rögzített dinamikai rendszerre épp Boltzmann hipotézisének állítását nyerjük – itt L_2 konvergenciában. E megjegyzés már mutatja az ergodtételek és az ergodicitás fogalmának rendkívül fontos voltát, most térjünk rá Neumann-tételének bizonyítására.

2.5 Tétel bizonyítása. Egyszerű lépésekben. Legyen $f \in L_2$.

1. A_n kontrakció, azaz $\|A_n f\|_2 \le \|f\|_2$.
2. Ha $A_n f$ konvergál, akkor $\bar{f} = \lim_{n\to\infty} A_n f$ invariáns, mert $\hat{T}$ folytonossága miatt
$$\hat{T}\bar{f} = \hat{T}\lim A_n f = \lim\left(\frac{n+1}{n}A_{n+1}f - \frac{f}{n}\right) = \bar{f}.$$

3. Jelöljük $E := \{f \in L_2 \colon A_n f$ konvergál L_2-ben$\}$.
   Tételünk fő állítása következni fog az alábbi két tulajdonságból:
   a) E zárt altér;
   b) E tartalmaz L_2-ben sűrű részhalmazt.
4. a) bizonyítására tegyük fel, hogy $f_k \in E$ és $\|f_k - f\|_2 \to 0$. Ekkor
$$\begin{aligned}\|A_n f - A_m f\|_2 \le \|A_n(f - f_k)\|_2 + \|(A_n - A_m) f_k\|_2 + \\ + \|A_m(f_k - f)\|_2 \le 2\|f - f_k\| + \\ + \|(A_n - A_m) f_k\|_2.\end{aligned}$$
   A jobboldali első tag tetszőlegesen kicsivé tehető k alkalmas választásával, míg fix k-ra a második tag is tetszőleges kicsi, ha n, m elég nagyok. Megjegyezzük még, hogy $\lim\limits_n A_n f$ folytonos $f \in E$-re, ugyanis $\|A_n f_k - A_n f\| \le \|f_k - f\|$.
5. Bizonyítsuk b)-t. Nyilván $f = \hat{T} f$ esetén $f \in E$. Először belátjuk, hogy $(f, \hat{T} f) = \|f\|_2^2$ ekvivalens azzal, hogy $(f, \hat{T}^* f) = \|f\|_2^2$. Ekkor ugyanis $(f, \hat{T} f)$ valós, és ezért $\|f\|_2^2 = (f, \hat{T} f) = (\hat{T} f, f) = (f, \hat{T}^* f) = (\hat{T}^* f, f)$. Innen már látszik, hogy $f = \hat{T} f$ akkor és csak akkor, ha $f = \hat{T}^* f$, azaz a $\hat{T}$ és a $\hat{T}^*$ operátoroknak az 1 sajátértékhez tartozó sajátalterei megegyeznek.
6. Korlátos A operátorok jól ismert, egyszerű tulajdonsága: $\forall \lambda \in \mathbb{C}$-re
$$\mathrm{Cl}\,[\mathrm{Range}\,(A - \lambda)] \oplus \mathrm{Ker}\,(A^* - \bar{\lambda}) = L_2.$$
   Innen esetünkben ($A = \hat{T},\ \lambda = 1$) $\mathrm{Cl}\,[\mathrm{Range}\,(I - \hat{T})] \oplus \mathrm{Inv} = L_2$, ahol $\mathrm{Inv} := \{f \colon f = \hat{T} f\} = \{f \colon f = \hat{T}^* f\}$. (A felhasznált tulajdonság igazolása: valóban, ha $h \perp \mathrm{Range}\,(A - \lambda)$, azaz ha $\forall f = Ag - \lambda g$-re $(h, f) = 0$, akkor $\forall g \in L_2$-re $0 = (h, Ag - g) = (A^* h - \overline{\lambda} h, g)$, vagyis $h \in \mathrm{Ker}\,(A^* - \overline{\lambda})$; és a gondolatsor megfordítható.)
7. b) már következni fog abból, hogy $\mathrm{Range}\,(I - \hat{T}) \subset E$. Ez utóbbi állítás azonban triviális, ugyanis ha $f = g - \hat{T} g$, ekkor
$$A_n f = \frac{1}{n}(g - \hat{T}^n g) \xrightarrow[n \to \infty]{L_2} 0.$$
8. Az eddigiekből az is látszik, hogy $f \in \mathrm{Inv}$-re $A_n f = f = \bar{f}$, míg $f \in \mathrm{Range}(I - \hat{T})$-re $\bar{f} = 0$. Innen adódik, hogy bármely $f \in L_2$-re $\bar{f}$ az $f \in L_2$ elem vetülete az Inv zárt altérre. E megjegyzésből a tétel második állítása nyilvánvaló.
9. A harmadik állítás belátásához tegyük fel, hogy $f = \bar{f} + (I - \hat{T}) g$, ahol $\bar{f} \in \mathrm{Inv}$, $g \in L_2$. Ekkor nyilván áll $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu = \int \bar{f} \,\mathrm{d}\mu$. Mivel az előbbi alakú f-ek sűrű halmazt alkotnak L_2-ben, azért a kívánt egyenlőség egész L_2-n igaz. $\square$

2.7 Feladat. (L_1-ergodtétel) *Ha T endomorfizmus, akkor $\forall f \in L_1$-re $\exists \bar{f} \in L_1$ invariáns függvény, hogy $\|A_n f - \bar{f}\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$ és $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int \bar{f} \,\mathrm{d}\mu$.*

Utalás. L_2 sűrű altér L_1-ben.

Az átlag normában vett ergodtételek mellett igaz a m. mindenütt való konvergenciát állító ún. *individuális ergodtétel* is. Ennek bizonyítását l. pl. Cornfeld–Sinai–Fomin: Ergodic Theory függeléke.

2.8 Tétel. (Birkhoff (1931) – Hincsin (1933) ergodtétele) *Legyen T endomorfizmus, és $f \in L_1$. Ekkor $\exists \bar{f} \in L_1$ invariáns függvény, hogy $A_n f \to \bar{f}$ teljesül $\mu-$ m. m. és $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int \bar{f} \,\mathrm{d}\mu$.*

2.9 Megjegyzés. Mindhárom ergodtétel analóg megfogalmazása igaz (i) automorfizmusra és (ii) folytonos paraméterű rendszerekre is. Automorfizmus esetén pl. 2.5 Tétel állítása mellett igaz a következő állítás is: a

$$A_n^- f := 1/n(f + \hat{T}^{-1} f + \ldots \hat{T}^{-n+1} f)$$

jelöléssel élve $\exists \bar{f}^- \in L_2$ invariáns függvény, hogy $\|A_n^- f - \bar{f}^-\|_2 \to 0$, $(n \to \infty)$, és $\bar{f}^- = \bar{f}$ áll $\mu-$ m. m.

Folytonos paraméterű rendszerekre az ergodtétel egyszerű következménye a 2.5 illetve a 2.8 Tételeknek. Valóban elegendő utóbbiakat az $F(x) := \int_0^1 f(S^s x)\,\mathrm{d}s$ függvényekre alkalmaznunk (a Fubini tétel miatt $f \in L_1(\mu)$-ből $F \in L_1(\mu)$ azonnal adódik).

Neumann ergodtételének kimondása után már bevezettük az ergodicitás fogalmát, és megmutattuk annak alapvető fontosságát. Most megadjuk az ergodicitás fogalmának egy egyszerű átfogalmazását.

2.10 Definíció. $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus esetén az $A \in \mathcal{F}$ halmazt invariánsnak nevezzük, ha χ_A invariáns függvény.

Az A halmaz csak akkor invariáns, ha $\mu(A \circ T^{-1}A) = 0$. Könnyű látni, hogy az invariáns halmazok σ-algebrát alkotnak, ezt $\mathcal{I}$-vel jelöljük.

2.11 Lemma. *Az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus csak akkor ergodikus, ha minden invariáns halmaz triviális, azaz mértéke 0 vagy 1.*

A lemma bizonyítása. Ergodikus T-re $\forall A \in \mathcal{I}$-re $\chi_A =$ const, ami csakis akkor lehet, ha $\mu(A) = 0$ vagy 1. Tegyük fel, hogy minden invariáns halmaz triviális. Akkor az f invariáns függvényre igaz: minden $c \in \mathbb{R}$-re az $\{x\colon f(x) < c\}$ halmazok invariánsok lévén, mértékük 0 vagy 1. Tehát van egy c_0, hogy $\forall c < c_0$-ra az említett mérték 0, $\forall c > c_0$-ra 1. Ekkor $f = c_0$, persze μ majdnem mindenütt. $\square$

Poincaré tételének alkalmazásaként megkaptuk az $n\alpha \pmod 1$ sorozat sűrű voltát irracionális α esetén. Az ergodtétel következménye lesz viszont

2.12 Tétel. (Weyl tétele, 1916) *Legyen α irracionális. Ekkor $\forall I \subset S$ intervallumra $n \to \infty$ esetén*

$$1/n \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{n\alpha\}) \to \mu(I)$$

ahol μ a Lebesgue-mérték.

A tétel valójában az irracionális forgatás ergodikus voltának folyománya. Ez viszont speciális esete a tórusz feltekerésének (lásd 1.10 Példa).

2.13 Feladat. (V. Arnold) *Tekintsük az $1, 2, \ldots, 2^n, \ldots$ számsorozat tízes számrendszerben felírt alakjának első jegyeit. Előfordul ezek között a 7? A 8? Ha igen, melyik gyakoribb?*

2.14 Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha valamely n-re T^n ergodikus endomorfizmus, akkor T is az. Adjunk példát arra, hogy az állítás megfordítása nem igaz.*

Utalás. $\mu(T^{-n}A \circ A) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j+1}A \circ T^{-j}A)$, ugyanis $\mathrm{d}(A, B) := \mu(A \circ B)$ metrikát definiál a mérhető részhalmazokon.

Függelék

Konvergenciafajták. Véges mértéktér esetén a Hölder egyenlőtlenség miatt $1 \leq p < p'$-re $\|f\|_p \leq \|f\|_{p'}$ áll, így $L_{p'} \subset L_p$, tehát az L_p-konvergencia következik az L'_p-konvergenciából. Továbbá a majdnem mindenütt való konvergencia független az L_p-konvergenciától, hiszen egyrészt pl. $\lim_n b_n = 0$ esetén a $[0,1]$-en értelmezett $f_n := a_n \chi_{(0,b_n)}$ függvénysorozat mindenütt tart 0-hoz, ugyanakkor $\|f_n\|_p = b_n^{1/p}|a_n|$, ami tetszőlegesen beállítható, másrészt ha

$$g_n := a_n \chi_{[\frac{k'}{2^m}, \frac{k'+1}{2^m}]}$$

ha $2^m \leq k < 2^{m+1}$ és $k' := k - 2^m$, akkor $\|g_n\|_p = |a_m|(\frac{1}{2^m})^{1/p}$, ami már $a_m = 1$ választással is tart 0-hoz, viszont a függvénysorozat sehol sem konvergens.

Szorzattér. Legyenek $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ valószínűségi mezők. Ezek szorzata $(X, \mathcal{F}) := (X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1) \times (X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ természetes módon így vezethető be. Egyrészt $X = X_1 \times X_2 := \{(x_1, x_2) \colon x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$, másrészt $\mathcal{F}$ az $A_1 \times A_2 \colon A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$ típusú szorzathalmazok által generált $\sigma-$algebra. Végül μ $(=\mu_1 \times \mu_2)$ az egyetlen valószínűségi mérték, amelyre $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$ esetén $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$.

Fubini tétele. Tegyük fel, hogy $\phi \colon X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Ha $\phi \in L_1(\mu)$, akkor alkalmas $A_1 \subset X_1,\ \mu(X_1 \setminus A_1) = 0$ és $A_2 \subset X_2,\ \mu_2(X_2 \setminus A_2) = 0$ részhalmazokra $\int_{X_2} \phi(x_1, x_2)\mu_2(\mathrm{d}x_2)$ illetve $\int_{X_1} \phi(x_1, x_2)\mu_1(\mathrm{d}x_1)$ mérhetőek és végesek

A_1-en illetve A_2-n, továbbá

$$\begin{aligned}\int_X \phi(x_1, x_2)\mu\,(\mathrm{d}x) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \phi(x_1, x_2)\mu_2\,(\mathrm{d}x_2) \right) \mu_1\,(\mathrm{d}x_1) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \phi(x_1, x_2)\mu_1\,(\mathrm{d}x_1) \right) \mu_2\,(\mathrm{d}x_2).\end{aligned}$$

3. fejezet

További példák. Ergodikus leképezések

3.1 Tétel. *A körvonal α szöggel való forgatása akkor és csak akkor ergodikus, ha α irracionális.*

Bizonyítás. Legyen az $f\colon S \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető függvény Fourier sora $f(x) = \sum_n a_n e^{2\pi i n x}$ (a sor L_2-értelemben konvergál). Ekkor

$$\hat{R}_\alpha f(x) = f(R_\alpha x) = \sum_n (e^{2\pi i n \alpha} a_n) e^{2\pi i n x}. \tag{3.1}$$

Tudjuk, hogy $f = \hat{R}_\alpha f$ csak akkor, ha $\forall n$-re $a_n = e^{2\pi i n \alpha} a_n$. Mármost ha $\forall n \neq 0$-ra $a_n = 0$ teljesül, akkor $f = \text{const}$. Ha ellenben $\exists n_0 \neq 0$ hogy $a_{n_0} \neq 0$, akkor $e^{2\pi i n_0 \alpha} = 1$, ami pontosan akkor áll, ha $\exists k \in \mathbb{Z}$, hogy $n_0 \alpha = k$. Tehát $\alpha \in \mathbb{Q}$. □

R_α ergodicitásának és Birkhoff–Hincsin tételének folyománya, hogy μ-m.m. x-re

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{x + k\alpha\}) \to \mu(I) \tag{3.2}$$

ha $n \to \infty$. Itt azonban igaz az erősebb

3.2 Tétel. (3.2) *teljesül $\forall x \in S$-re.*

Innen $x = 0$ választással már adódik Weyl tétele is (2.12 Tétel).

Bizonyítás.

3.3 Definíció. Az $\{x_n\colon x_n \in S,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ sorozat egyenletes eloszlású, ha tetszőleges $I \subset S$ intervallumra

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{x_k\}) \to \mu(I).$$

Először szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy az $\{x_n\}$ sorozat egyenletes eloszlású legyen.

3.4 Lemma. *Az $\{x_n\}$ sorozat csak akkor egyenletes eloszlású, ha $\forall f \in C(S)$ függvényre*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_i) \to \int_S f\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.3}$$

A lemma igazolását későbbre halasztva bizonyítsuk tételünket. Legyen $f \in C(S)$. 3.1 Tételből következik, hogy μ-m.m. $x \in S$-re

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\{x+k\alpha\}) \to \int f\,\mathrm{d}\mu \qquad (n \to \infty). \tag{3.4}$$

Megmutatjuk, hogy e konvergencia $\forall x \in S$-re is áll. Valóban legyen $\overline{x} \in S$ olyan pont, amelyre (3.4) igaz, és legyen $x \in S$ tetszőlegesen rögzített. Mivel $\{\{\overline{x}+n\alpha\}\}$ sűrű, ezért alkalmas $\overline{k} = \overline{k}(\delta)$-ra dist $(\{\overline{x}+\overline{k}\alpha\}, x) < \delta$. Igaz viszont

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\{x+k\alpha\}) - \frac{1}{n+\overline{k}}\sum_{k=1}^{n+\overline{k}} f(\{\overline{x}+k\alpha\})\right| \le \\
&\quad \le \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left[f(\{x+k\alpha\}) - f(\{\overline{x}+(k+\overline{k})\alpha\})\right]\right| + \\
&\quad + \frac{\overline{k}}{n+\overline{k}}\max|f| + \frac{\overline{k}}{n(n+\overline{k})}\sum_{k=1}^{n+\overline{k}} |f(\{\overline{x}+k\alpha\})|.
\end{aligned}$$

f egyenletes folytonossága miatt a jobboldali első összeg $< \dfrac{\varepsilon}{3}$, ha δ elég kicsi. A második és harmadik tag viszont ránézésre $< \dfrac{\varepsilon}{3}$, ha n elég nagy. Következésképpen (3.4) $\forall x \in S$-re igaz. □

Bizonyítsuk végül a 3.4 Lemmát. Tegyük fel, hogy (3.3) áll $\forall f \in C(S)$-re és igazoljuk, hogy $\{x_n\}$ egyenletes eloszlású. Jelöljük: $\nu_n(I) := \sum_{k=1}^{n} \chi_I(x_i)$. Fix $\varepsilon > 0$-ra válasszuk meg az f_* és $f^* \in C(S)$ függvényeket, hogy

(i) $f_*(x) \le \chi_I(x) \le f^*(x) \qquad \forall x \in S$-re,

(ii) $\int_S (f^* - f_*)\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Ekkor $\sum_{k=1}^{n} f_*(x_i) \le \nu_n(I) \le \sum_{k=1}^{n} f^*(x_i)$, azaz

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_*(x_i) \le \frac{\nu_n(I)}{n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^*(x_i).$$

Itt (3.3) miatt a bal és jobboldal konvergál $n \to \infty$ esetén $\int f_* \, \mathrm{d}\mu$-höz illetve $\int f^* \, \mathrm{d}\mu$-höz. Sőt

$$\mu(I) - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\nu_n(I)}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\nu_n(I)}{n} \leq \mu(I) + \varepsilon,$$

mivel $\int f_* \, \mathrm{d}\mu \ \leq \ \mu(I) \ \leq \ \int f^* \, \mathrm{d}\mu$. Az állítás megfordításának igazolását már elég vázolnunk. $\{x_n\}$ egyenletessége azt jelenti, hogy (3.3) áll intervallumok indikátorfüggvényeire. Következőleg (3.3) igaz lesz ilyenek véges lineáris kombinációira is. Viszont ezekkel már minden $f \in C(S)$ jól közelíthető L_1-ben – alulról és felülről is, így az előbbi gondolatmenet – mutatur mutandis – elismételhető. □

A körvonal forgatásának többdimenziós általánosítása volt a tórusz eltolása (1.10 Példa).

A 3.1 Tétel bizonyításának gondolata átvihető, így érvényes a

3.5 Tétel. *A tórusz (**??**)-gyel értelmezett eltolása akkor és csak akkor ergodikus, ha $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ racionálisan függetlenek, ahol $\alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_d)$.*

Ugyanígy általánosítható 3.2 Tétel, 3.3 Definíció, és 3.4 Lemma is.

3.6 Feladat. (Simányi–Szász) *Legyen $(M, \mathcal{F})$ mérhető tér, G csoport. Legyen adott minden $g \in G$-re egy $(M, \mathcal{F}, T_g)$ automorfizmus. Az $(M, \mathcal{F}, T_G) = \{(M, \mathcal{F}, T_g) \colon g \in G\}$ családot csoport-hatásnak nevezzük, ha $\forall g_1, g_2 \in G$ -re $T_{g_1 g_2} = T_{g_2} T_{g_1}$ (a G csoport hat az M téren). Tetszőleges $x \in M$ esetén az x G-pályájának nevezzük a $Gx := \{T_g x \colon g \in G\}$ halmazt.*

Legyen adott $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, és tekintsük $\mathbb{R}^d$-ben az α-ra ortogonális g vektorok $\mathbb{R}^{d-1}$-el izomorf additív G csoportját. Hasson $\mathbb{R}^d$-n a G csoport a következőképpen: $\forall g \in G, x \in \mathbb{R}^d$-re

$$T_g x = g + x.$$

$\mathbb{R}^d$-t faktorizálva $\mathbb{Z}^d$ szerint végül is $\mathbb{T}^d$-n kapunk egy G-hatást. Bizonyítsuk be, hogy

(1) G-nek csak akkor van $\mathbb{T}^d$-ben sűrű pályája, ha az α koordinátái között van kettő lineárisan független (és akkor minden pálya sűrű);

(2) Az előbbi feltétel mellett a pályák aszimptotikusan egyenletes eloszlásúak (mit is jelent ez?);

(3) ** Legyen adott $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy van olyan véges F halmaza az α-knak, hogy ha $\alpha \notin F$, akkor $G = G_\alpha$ minden pályája metszi az U halmazt.

A csoport-hatás speciális esete a

3.7 Példa. *A csoport-eltolás.*

Legyen M kompakt topológikus csoport és μ a Haar-mérték M-en. Tetszőleges rögzített $g \in G$-re legyen

$$T_g x = g \cdot x.$$

Ekkor $(\mathbb{M}, \mathcal{F}, T_G, \mu)$ automorfizmus. Ez a példa egyben általánosítása a tórusz feltekerésének (1.12 Példa).

3.8 Feladat. *Mi T_G ergodicitásának feltétele, ha G Abel-csoport?*

A 3.2 Tétel bizonyításában döntő szerepe volt a forgatás következő, (**??**)-ban kihasznált tulajdonságának: ha két fázispont távolsága $< \delta$, akkor ez érvényes marad összes képeikre is! A *kezdeti feltételekre való érzéketlenség*, amely itt igen erős és egyenletes, dinamikai rendszerek stabil viselkedésének alapvető jellemzője. Az 5. fejezetben látni fogjuk, hogy a körvonal forgatása, bár ergodikus, de az ennél valamivel erősebb keverő tulajdonsággal már nem rendelkezik.

4. fejezet

Stacionárius sorozatok mint dinamikai rendszerek, Bernoulli-sorozatok

Legyen $M = E^{\mathbb{Z}}$ (vagy $M = E^{\mathbb{Z}_+}$) ahol E véges vagy megszámlálható halmaz. $x \in M$ tehát így írható: $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$. *Hengerhalmaznak* nevezzük a $H \subset M$ részhalmazt, ha alkalmas $\ell \geq 1$-re, $i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$ indexekre és $E_1, \dots, E_\ell \subset E$ részhalmazra

$$H = \{x \in M \colon x_{i_1} \in E_1, \dots, x_{i_\ell} \in E_\ell\}.$$

Jelölje $\mathcal{F}$ a hengerhalmazok által generált σ-algebrát, és legyen μ valószínűségi mérték $\mathcal{F}$-en. (Szokás általánosabban hengerhalmaznak nevezni a

$$H = \{x \in M \colon (x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell}) \in E\}$$

halmazokat, ahol $E \subset E^\ell$ tetszőleges mérhető részhalmaz. Az ezek által generált σ-algebra természetesen ugyancsak $\mathcal{F}$.)

4.1 Definíció. A μ mérték stacionárius, ha tetszőleges H hengerhalmazra és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re

$$\mu\{x_{i_1} \in E_1, \dots, x_{i_\ell} \in E_\ell\} = \mu\{x_{i_1+k} \in E_1, \dots, x_{i_\ell+k} \in E_\ell\}.$$

4.2 Definíció. A $(Tx)_i = x_{i+1}$ összefüggéssel értelmezett $T \colon M \to M$ automorfizmust bal-eltolásnak (bal-shiftnek) nevezzük. Analóg módon értelmezhető a T bal-eltolás, ha $M = E^{\mathbb{Z}_+}$, amely ekkor csak endomorfizmus, mert nyilvánvaló módon nem invertálható.

Könnyű látni, hogy az $(M, \mathcal{F})$-en adott μ mérték csak akkor stacionárius, ha invariáns a T bal-eltolásra nézve.

Hasonlóan értelmezhetjük az $M = E^{\mathbb{Z}_+}$ téren is a bal-eltolást, amely most endomorfizmus. További természetes általánosítási lehetőségek: (i) E helyett vehetjük $\mathbb{R}$-et vagy $\mathbb{C}$-t, illetve $\mathbb{Z}_{(+)}$ helyett $\mathbb{R}_{(+)}$-t.

4.3 Definíció. Ha a μ stacionárius mérték egyúttal szorzatmérték, azaz $\forall \ell, i_1 < ... < i_\ell, E_1, \ldots, E_\ell$ választásra

$$\mu\{x_{i_1} \in E_1, \ldots, x_{i_\ell} \in E_\ell\} = \prod_{j=1}^{\ell} \mu\{x_{i_j} \in E_j\},$$

akkor a 4.2 Definícióban definiált automorfizmust Bernoulli-automorfizmusnak nevezzük. (Analóg a Bernoulli-endomorfizmus fogalma.)

Az 1.10 Példában már szó esett a $T\colon [0,1) \to [0,1)$ $Tx = \{2x\}$ bináris leképezésről. Legyen $x \in [0,1)$ bináris előállítása $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}$, amit szimbolikusan így írhatunk: $x = (x_0, x_1, \ldots)$. Könnyű látni, hogy akkor $Tx = (x_1, x_2 \ldots)$, azaz T ugyanúgy hat mint a bal-eltolás. Pontosabban:

4.4 Definíció. Az $(M_i, \mathcal{F}_i, \mu_i, T_i)\colon i = 1, 2$ endomorfizmusokat izomorfaknak (konjugáltaknak) nevezzük, ha $\exists M_i' \subset M_i$, hogy $\mu_i(M_i \setminus M_i') = 0$ és $\exists \varphi\colon M_1' \to M_2'$ 1-1 értelmű leképezés, hogy $\forall A_i \subset M_i',\ A_i \in \mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2)$-re

$$\mu_1(\varphi^{-1} A_2) = \mu_2(A_2) \quad (*) \text{ és } \mu_2(\varphi A_1) = \mu_1(A_1)$$

továbbá M_1'-n áll: $\varphi T_1 = T_2 \varphi \quad (*)$ és M_2'-n áll: $T_1 \varphi^{-1} = \varphi^{-1} T_2$.

Amennyiben ϕ nem invertálható, és az utóbbi relációpárok közül csak a (*)-gal jelzetteket követeljük meg, akkor az endomorfizmusokat szemi-konjugáltaknak nevezzük.

A fenti tulajdonságot szokás kommutatív diagramban is ábrázolni:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{T_1} & M_1 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ M_2 & \xrightarrow{T_2} & M_2 \end{array}$$

Legyen speciálisan $M_1 = [0,1)$, $M_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$, $T_1 x = \{2x\}$, $T_2(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$, μ_1 a Lebesgue mérték és μ_2 az $\left(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1\right)$ mértékek szorzata. Ekkor könnyű látni, hogy a két endomorfizmus izomorf. Az izomorfia fogalmára vonatkozólag könnyű gyakorlat:

4.5 Lemma. *Ergodikusnak lenni izomorfia-invariáns tulajdonság.*

Így a bináris leképezés ergodicitása következni fog egy általános tételből.

4.6 Tétel. *Minden Bernoulli-endomorfizmus (-automorfizmus) ergodikus.*

Térjünk rá a 4.6 Tétel bizonyítására. Előrebocsátunk egy egyszerű feladatot.

4.7 Feladat. *A mérhető halmazok $\sigma-$algebráján*

$$\rho(X, Y) = \mu(X \circ Y) \tag{4.1}$$

szemi-metrika (azaz $\rho(X,Y)=0$-ból nem feltétlen következik $X=Y$). Ugyanakkor az egymástól nullmértékű halmazban különböző mérhető részhalmazok ekvivalencia-osztályain már a fenti ρ metrika.

Bizonyítás. Legyen $A\in\mathcal{I}$. A mértékelméletből (vagy a valószínűségszámításból) jól ismert a következő approximációs tulajdonság: $\forall A\in\mathcal{F}$-hez és $\forall\varepsilon>0$-hoz található olyan $\ell\in\mathbb{Z}_+$ és $A_\ell\in\mathcal{F}$ hengerhalmaz, amely ilyen alakú: alkalmas $\tilde{A}_\ell\subset E^{\ell+1}$-lel

$$A_\ell=\{x\in M\colon (x_0,x_1,\dots,x_\ell)\in\tilde{A}_\ell\} \tag{4.2}$$

és emellett $\mu(A\circ A_\ell)<\varepsilon$ (azaz a szorzattér bármely mérhető halmaza tetszőlegesen jól közelíthető (véges tartójú) hengerhalmazzal). A stacionaritás következtében $\mu(T^{-n}A\circ T^{-n}A_\ell)<\varepsilon$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$. Ha $A\in\mathcal{I}$, akkor

$$\mu(A)=\mu(A\cap T^{-n}A)=\mu(A_\ell\cap T^{-n}A_\ell)+[\mu(A\cap T^{-n}A)-\mu(A_\ell\cap T^{-n}A_\ell)]. \tag{4.3}$$

Mármost $|\mu(X\cap Y)-\mu(U\cap V)|\le\mu(X\circ U)+\mu(Y\circ V)$ (amiből valójában az következik, hogy $\mu(X\cap Y)$ mindkét változójában folytonos) miatt

$$|\mu(A\cap T^{-n}A)-\mu(A_\ell\cap T^{-n}A_\ell)|\le\mu(A\circ A_\ell)+\mu(T^{-n}(A\circ A_\ell))<2\varepsilon \tag{4.4}$$

így

$$|\mu(A)-\mu(A_\ell\cap T^{-n}A_\ell)|<2\varepsilon.$$

Azonban elég nagy n-re, egészen pontosan $n>l$-re – használva, hogy T Bernoulli-eltolás – $\mu(A_\ell\cap T^{-n}A_\ell)=(\mu(A_\ell))^2$, ezért $\forall\varepsilon>0$-ra

$$|\mu(A)-(\mu(A))^2|<|\mu(A)-(\mu(A_\ell))^2|-|(\mu(A))^2-(\mu(A_\ell))^2|<2\varepsilon+2\varepsilon=4\varepsilon.$$

Tehát $\mu(A)=0$ vagy 1. □

A 4.5 Lemmából és a 4.6 Tételből adódik a

4.8 Következmény. A bináris leképezés ergodikus.

Analóg módon tárgyalható a

4.9 Példa. (A pék automorfizmusa) Itt $M=[0,1)^2$, μ a Lebesgue-mérték, és $(u,v)\in M$-re

$$T_1(u,v):=\begin{cases}(\{2u\},v/2) & \text{ha}\quad 0\le u<1/2\\[4pt] (\{2u\},\dfrac{v+1}{2}) & \text{ha}\quad 1/2\le u<1.\end{cases}$$

A leképezés így hat: először az egységnégyzetet az u-tengely irányában 2-szeresére nyújtjuk, és egyúttal a v-tengely irányában 1/2-szeresére zsugorítjuk (a terület invariáns marad!), majd a kapott téglalapnak az egységnégyzetből kilógó felét annak felső felébe toljuk párhuzamosan. (A pék megközelítőleg valami ilyet csinál.) A T_1 automorfizmus a *pék automorfizmusa*.

Tekintsük a következő Bernoulli-eltolást: $M = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, μ ismét az $(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)$ mértékek szorzata, és T_2 a bal-eltolás. Könnyű látni, hogy a

$$\phi((\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{-i}}{2^i} \right)$$

egyenlettel értelmezett $\phi\colon M_2 \to M_1$ leképezés izomorfia, ezért 4.5 Lemmából és a 4.6 Tételből ismét adódik a

4.10 Következmény. A pék automorfizmusa ergodikus.

Az ergodicitás itt 4.6 Tételből jön. Lehetséges más bizonyítás is, amely a geometriai képen alapszik, nevezetesen azon, hogy a pék automorfizmusa az egyik irányban nyújt, a másikban zsugorít. Ezt a mechanizmust *hiperbolikus viselkedésnek* nevezzük. Eberhard Hopf ezt kihasználó geometriai módszerét a 7. fejezetben tárgyaljuk.

Befejezésül még egy megjegyzés. Fenti módszerünk így is értelmezhető: a számunkra érdekes dinamikák (bináris leképezés, a pék automorfizmusa, ...) helyett a sorozatok terén keresünk velük izomorf eltolást. Ez utóbbi gyakran áttekinthetőbb objektum, általános struktúra, és tanulmányozásához felhasználhatóak pl. az algebra, a kombinatorika, valamint — a mérték stacionaritása miatt — a valószínűségszámítás, sőt az információelmélet illetve a statisztikus fizika (egydimenziós rendszerek) eredményei is. Fontossága miatt az objektumnak, illetve a módszernek külön neve van: *szimbolikus dinamika*. A módszert a 70-es években Bowen, Ruelle és Szináj alapozták meg, és azóta is rendkívül széles körben alkalmazzák a dinamikai rendszerek tanulmányozása során.

A $\mathcal{I}$ σ-algebra mellett másik fontos σ-algebra az ún. *farok σ-algebra*.

4.11 Definíció. Az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus $\mathcal{T}$ farok σ-algebrája

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{F}_n,$$

ahol $\mathcal{F}_n$ a következő típusú H hengerhalmazok által generált σ-algebra: alkalmas $\widetilde{H} \in E^{\ell+1}$-re

$$H := \{x \in M\colon (x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+\ell}) \in \widetilde{H}\}.$$

Automorfizmusok esetén $\mathcal{T}$ mellett létezik még T^{-1} $\mathcal{T}^{-}$-farok σ-algebrája is, amely nem feltétlenül azonos $\mathcal{T}$-vel.

Igen hasznos az egyszerű

4.12 Lemma. $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}$.

Bizonyítás. Valóban, ha $A \in \mathcal{I}$, akkor alkalmas $\widetilde{A} \in E^{\mathbb{Z}_+}$-ra

$$A = \{x \in M\colon (x_0, x_1, \dots,) \in \widetilde{A}\}.$$

Azonban $\forall n \geq 0$-ra $A = T^{-n}A \pmod 0$, vagyis

$$A = \{x \in M\colon (x_n, x_{n+1}, \dots) \in \widetilde{A}\} \qquad \pmod 0.$$

Tehát $\forall n \geq 0$-ra $A \in \mathcal{F}_n$, következésképp $A \in \mathcal{T}$. $\square$

A lemma jelentősége abban áll, hogy bizonyos esetekben $\mathcal{T}$ trivialitása is igaz, sőt ezt könnyebb közvetlenül bizonyítani mint $\mathcal{I}$-ét (lásd 4.6 Tétel bizonyítását).

Egy megjegyzés a bináris leképezésről.

Korábban a bináris leképezést kétféle felfogásban is tekintettük: egyrészt mint a $[0,1]$ intervallum, másrészt mint a körvonal endomorfizmusát és mindkét objektumot azonosítottuk $[0,1)$-gyel. Az előbbi esetben a leképezés szakadásos, a másodikban síma (más az intervallum és más a körvonal topológiája!). Ha a körvonalat (1-re normált, így 1 periódusú) szögváltozó értelmezési tartományának fogjuk fel, akkor tehát a 1.10 Példabeli jelöléssel élve $f(\theta) = 2\theta$. Ezt a leképezést kiterjeszthetjük a sík leképezésévé a következőképpen: legyenek r, θ polár-koordináták, és legyen

$$f^*(r, \theta) := (r^{\frac{1}{2}}, 2\theta).$$

$r = 1$-t helyettesítve azt látjuk, hogy $f^*(1, \theta) = (1, 2\theta) = (1, f(\theta))$.

4.13 Példa. Hogyan viselkednek $n \to \infty$ esetén az $(f^*)^n(r, \theta)$ pályák?

5. fejezet

Keverés és kinetika

Célunk a *keverés* fogalmának bevezetése, amely az ergodicitásnál valamivel erősebb sztohasztikus tulajdonság. Fontos alkalmazása: biztosítja a szóbanforgó dinamikai rendszer egyensúlyhoz való tartását alkalmas kezdeti mértékek esetén (ezt nevezik a *kinetika* problémájának).

Az ergodtételekből folyik, hogy az $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ ergodikus endomorfizmusra $f \in L_2$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int f \, \mathrm{d}\mu = c \tag{5.1}$$

teljesül μ-m.m. $x \in M$-re és L_2-értelemben is. Lévén $g \in L_2$-re $\|(A_n f)g - cg\|_1 \leq \|A_n f - c\|_2 \ \|g\|_2$, (5.1)-ből egyúttal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int f(T^k x) g(x) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu \int g \, \mathrm{d}\mu \tag{5.2}$$

is következik.

5.1 Lemma. (5.2) *ekvivalens* T *ergodicitásával.*

Bizonyítás. Valóban, legyen $A \in \mathcal{I}$, $f = g = \chi_A$. Akkor (5.2)-ből kapjuk: $\mu(A \cap A) = \mu(A) \cdot \mu(A)$, ahonnan $\mu(A) = 0$ vagy 1. $\square$

5.2 Definíció. A T endomorfizmus keverő, ha $\forall f, g \in L_2$ párra

$$\lim_{n\to\infty} \int f(T^n x) g(x) \, \mathrm{d}\mu = \int f d\mu \int g \, \mathrm{d}\mu.$$

Standard gondolattal igaz az

5.3 Lemma. *A* T *endomorfizmus csak akkor keverő, ha* $\forall A, B \in \mathcal{F}$*-re*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n} B) = \mu(A)\mu(B).$$

Innen egyszerűen adódik az

5.4 Lemma.

(1) *Keverőnek lenni izomorfia-invariáns tulajdonság.*

(2) *A keverésből következik az ergodicitás.*

Bizonyítás. (1) a definíció közvetlen következménye. (2) így látható be: a keverésből azonnal következik (5.2), így az 5.3 Lemma miatt az ergodicitás is. □

Keverő leképezések alappéldái a Bernoulli-endomorfizmusok.

5.5 Tétel. *Minden Bernoulli-endomorfizmus (automorfizmus) keverő.*

Bizonyítás. 4.6 Tétel bizonyításának módszere a keverést is kiadja. Valóban, az ott is használt approximációs tulajdonság miatt $\forall A, B \in \mathcal{F}$-re és $\forall \varepsilon > 0$-ra van (4.2) alakú A_ℓ illetve B_ℓ, hogy $\mu(A \circ A_\ell), \mu(B \circ B_\ell) < \varepsilon$. Ekkor

$$\mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A_\ell \cap T^{-n}B_\ell) + [\mu(A \circ T^{-n}B) - \mu(A_\ell \circ T^{-n}B_\ell)] \ .$$

Mármost, ha $n > \ell$, akkor $\mu(A_\ell \cap T^{-n}B_\ell) = \mu(A_\ell)\mu(B_\ell)$, viszont (4.4)-hez hasonlóan

$$|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A_\ell \cap T^{-n}B_\ell)| < 2\varepsilon$$

vagyis elég nagy n-re

$$|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| < 4\varepsilon.$$ □

Ugyanakkor a körvonal forgatása nem keverő.

5.6 Lemma. *Ha α irracionális, akkor T_α nem keverő.*

Bizonyítás. Legyen $A = B = I = [a, b] \subset S$ tetszőleges intervallum. $\{n\alpha\}$ sűrű S-en (l. 2.1 Tétel bizonyítása után), így $|\mu(I \cap T^{-n}I) - \mu(I)|$ alkalmas n-re tetszőleges kicsivé tehető, ami $0 < \mu(I) < 1$ esetén ellentmondana $\lim_{n\to\infty} \mu(I \cap T^{-n}I) = \mu^2(I)$-nek. □

Nézzük a keverés tulajdonságának egy egyszerű, de fontos alkalmazását. Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu, T^{\mathbb{R}_+})$ leképezés-félcsoport, de a $t = 0$ időpontban indítsuk rendszerünket a μ_0 nem-invariáns mértékből. Ekkor $t(> 0)$ időben rendszerünk eloszlása így adható meg: $A \in \mathcal{F}$-re

$$\mu_t(A) = \mu_0\{x \colon T^t x \in A\} = \mu_0(T^{-t}A).$$

Tegyük fel, hogy μ_0 abszolút folytonos az invariáns μ-re nézve, és tegyük fel, hogy $\frac{d\mu_0}{d\mu} \in L_2(\mu)$. Ekkor

$$\mu_s(A) = \int_M \chi_A(T^s x)\, d\mu_0 = \int \chi_A(T^s x) \frac{d\mu_0}{d\mu}(x)\, d\mu.$$

Ha T ergodikus, akkor (5.2) miatt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mu_s(A)\,\mathrm{d}s = \mu(A) \int \frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mu}(x)\,\mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

Sőt, ha T keverő is, akkor

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t(A) = \mu(A) \tag{5.3}$$

is áll. Tehát igaz az

5.7 Tétel. *Ha a* $(M, \mathcal{F}, \mu, T^{\mathbb{R}_+})$ *egyensúlyi dinamika keverő, és a* μ_0 *nem-egyensúlyi kezdeti mértékre* $\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mu} \in L_2(\mu)$*, akkor* (5.3) *igaz* $\forall A \in \mathcal{F}$*-re.*

6. fejezet

A tórusz algebrai automorfizmusa

A d-dimenziós tórusz, $S^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ kompakt Abel csoport, amelyen továbbra is μ jelöli a Lebesgue-mértéket. (Több itt bevezetendő fogalom kiterjeszthető általában kompakt Abel-csoportokra, amelyeken Haar Alfréd tételének speciális eseteként létezik a csoport-eltolásra (l. 3.7 Példa) invariáns ún. Haar-mérték, mi azonban maradunk a tórusz példájánál.)

6.1 Definíció. Az $(S^d, \mathcal{F}, \mu, T)$ automorfizmust csoport-automofizmusnak nevezzük, ha

(i) T és T^{-1} folytonosak,

(ii) $\forall x, y \in S^d$-re $T(x+y) = Tx + Ty$.

Legyen $A = (a_{jk})_{1\leq j,k\leq d}$ egész elemű mátrix, amelyre $|\det A| = 1$.

6.2 Lemma. *S^d-nek a*

$$Tx \equiv Ax \qquad (mod\ \mathbb{Z}^d)$$

reláció által értelmezett automorfizmusa csoport-automorfizmus.

Bizonyítás. Jelölje általában $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ az $x \in S^d$ elem valamely felemeltjét. Először belátjuk, hogy T jól értelmezett. Ez azonnal adódik abból a feltételből, hogy A elemei egészek. Könnyű látni, hogy T^{-1} is egyértékű. Valóban, $|\det A| = 1$ miatt A^{-1} létezik, sőt elemei egészek. T és T^{-1} folytonossága nyilvánvaló. A $|\det A| = 1$ feltevésből az is folyik, hogy a Lebesgue-mérték invariáns. Befejezésül

$$T(x+y) \equiv A(x+y) = Ax + Ay \equiv Tx + Ty,$$

ahol a $\equiv$ kongruencia mindig (mod $\mathbb{Z}^d$). $\square$

Először a Fourier-analízis eszközével szükséges és elégséges feltételt adunk a tórusz algebrai automorfizmusának ergodicitására.

6.3 Definíció. A $\chi\colon S^d \to \mathbb{C}$ nem azonosan eltűnő, folytonos függvényt karakternek nevezzük, ha $\forall x, y \in S^d - re$

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y).$$

6.4 A Definíció egyszerű következményei.

1. $\forall \chi$ karakterre $\chi(0) = 1$, ugyanis $\chi(0) = 0$-ból $\chi(x) \equiv 0$ adódna.
2. $\forall \chi_1, \chi_2$ karakter-párra $\chi_1\chi_2$ is karakter.
3. Az összes karakter ilyen alakú:
$$\chi_n(x) = \exp(2\pi i(n,x))$$
ahol $n \in \mathbb{Z}^d$ (ezek ugyanis a Cauchy-függvényegyenlet folytonos megoldásai).
4. Az $\widehat{S^d} := \{\chi_n\colon n \in \mathbb{Z}^d\}$ csoportot *duális csoportnak* nevezzük.
5. $\int\limits_{S^d} \chi_n(x)\mu(dx) = \delta_{0,n}$.
6. A karakterek teljes ortonormált rendszert alkotnak $L_2(S^d, \mu)$-ben, ahol a skalárszorzat $\langle \phi, \psi \rangle := \displaystyle\int \phi(x)\bar{\psi}(x)\mu(\mathrm{d}x)$. Speciálisan $\langle \chi_n, \chi_m \rangle = \delta_{n-m}$.
7. $\widehat{S^d}$-n is tekinthetjük az indukált leképezést: $\chi \in \widehat{S^d}$-re
$$(\hat{T}\chi)(x) := \chi(Tx).$$
$\hat{T}\chi$ valóban karakter, mert
$$(\hat{T}\chi)(x+y) = \chi(T(x+y)) = \chi(Tx)\chi(Ty) = (\hat{T}\chi)(x)(\hat{T}\chi)(y).$$
8. $\hat{T}\chi_n = \chi_{A^*n}$.
9. $\widehat{S^d} \subset L_2(S^d, \mu)$, így valójában $\hat{T}$ a 2. fejezetben használt $\hat{T}\colon L_2 \to L_2$ leképezés $\widehat{S^d}$-re való megszorítása, így $\hat{T}$ itt is unitér. (N. B. T így $\hat{T}$ is invertálható.
10. $\hat{T}(\chi_1.\chi_2) = \hat{T}\chi_1.\hat{T}\chi_2$ és $(\hat{T})^{-1} = \widehat{T^{-1}}$.
Tehát $\hat{T}$ is csoport-automorfizmus.

6.5 Tétel. *A tórusz T algebrai automorfizmusa csak akkor keverő, ha $\forall \chi (\not\equiv 1) \in \widehat{S^d}$ karakterre a $\{(\hat{T})^k\chi\colon k \in \mathbb{Z}\}$ trajektória végtelen, azaz aperiódikus. Ebben az esetben T keverő is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T ergodikus, de $\exists\chi(\not\equiv 1) \in \widehat{S^d}$ és $\exists m(\neq 0) \in \mathbb{Z}$, hogy $(\hat{T})^m\chi = \chi$. Legyen $m > 0$ a minimális ilyen m. Könnyű látni, hogy

$$f := \frac{1}{m}(\chi + \hat{T}\chi + \cdots + (\hat{T})^{m-1}\chi)$$

invariáns függvény S^d-n. T ergodikus lévén $f =$ const $= c$, viszont akkor a 6.4 5. pontja miatt

$$0 = \langle c, \chi\rangle = \frac{1}{m}\langle\chi, \chi\rangle,$$

ami azonban pozitív. Ezzel indirekte beláttuk, hogy az indukált trajektória végtelen.

Most ez utóbbit feltéve megmutatjuk, hogy T keverő. Ehhez elég belátni, hogy $\forall f, g \in L_2^o$-ra (ahol $L_2^o := \{f \in L_2 \colon \int f d\mu = 0\}$)

$$\lim_{n\to\infty} \langle\hat{T}^n f, g\rangle = 0. \tag{6.1}$$

Tekintsük f és g Fourier sorait:

$$f = \sum_{k\neq 0} a_k\chi_k, \qquad g = \sum_{k\neq 0} b_k\chi_k.$$

6.4 6. pontja miatt (6.1)-et elég belátni arra az esetre, amikor f és g Fourier sorai végesek. Viszont

$$\langle\hat{T}^n f, g\rangle = \sum_{k\neq 0}\sum_{\ell\neq 0} a_k b_\ell \langle\hat{T}^n\chi_k, \chi_\ell\rangle.$$

6.4 5. és 8. pontja miatt $\langle\hat{T}^n\chi_k, \chi_\ell\rangle \neq 0$ kizárólag akkor, ha $\hat{T}^n\chi_k = \chi_\ell$. Feltevésünk miatt azonban ez elég nagy n-re nem fordulhat elő, így elég nagy n-re $\langle\hat{T}^n f, g\rangle = 0$. □

6.6 Definíció. A tórusznak az A mátrix által származtatott $(S^d, \mathcal{F}, \mu, T)$ automorfizmusát hiperbolikusnak nevezzük, ha Spec $A \cap \{|z| = 1\} = \emptyset$.

6.5 Tétel egyszerű következménye a

6.7 Tétel. *Ha a tórusz T algebrai automorfizmusa hiperbolikus, akkor T ergodikus és keverő.*

Bizonyítás. Ha az A mátrix által származtatott T automorfizmus nem ergodikus, ha $\exists k \neq 0$ és $\exists n(\neq 0) \in \mathbb{Z}^d$ hogy $(\hat{T})^k\chi_n = \chi_n$, vagyis 6.4 8. pontja miatt $(A^*)^k n = n$. Ekkor természetesen A^*-nak – és egyúttal – A-nak van sajátértéke az egységkörön. Vagyis ha ez nincs így, akkor T ergodikus, sőt keverő. □

Pl. $d = 2$ esetén vagy mindkét sajátérték az egységkörön van, vagy mindkettő valós és egyikükre $|\lambda_s| < 1$, a másikra $|\lambda_u| > 1$ (itt s a stable, u az unstable szó kezdőbetűje; ennek magyarázatát l. a 7. fejezetben).

6.5 Tétel bizonyítása erősen használta a 6.4 tulajdonságokat, amelyek egyik lényeges feltétele volt, hogy T csoport-automorfizmus. A következő fejezetben a tórusz algebrai automorfizmusa ergodicitásának alátámasztására olyan „geometriai" módszert ismertetünk, amely nem használja ki a leképezés, „egzakt" tulajdonságait, ezért messzemenően általalánosítható.

7. fejezet

Hopf geometriai módszere

A módszert legegyszerűbb a tórusz algebrai automorfizmusának esetére elmondanunk. Közvetlenül csak az ergodicitást adja, a keverést nem, viszont a módszer szoros összefüggésben áll a hiperbolikus dinamikai rendszerek elméletének gyökereivel, és az általános, nem-egzakt esetekben lényegében az egyetlen eszköz ergodicitás igazolására. Tehát igazoljuk a 6.5 Tételnél valamivel gyengébb állítást:

7.1 Tétel. *A tórusz hiperbolikus algebrai automorfizmusa ergodikus.*

Bizonyítás. Egyszerűség kedvéért legyen $d = 2$, vagyis mindkét sajátérték valós és legyen $|\lambda_s| < 1$, $|\lambda_u| > 1$. Ebben az esetben A-nak vannak $\mathbb{R}^2$-beli sajátvektorai: e_s és e_u. A bizonyítás fontos eszközei a *szűkülő illetve táguló fonalak*.

7.2 Definíció. A T leképezés $x \in S^d$ ponton keresztül átmenő szűkülő (stabil) fonala

$$\gamma^s(x) = \left\{ y \in S^d \colon \lim_{n \to \infty} \operatorname{dist}(T^n x, T^n y) = 0 \right\}$$

és táguló (instabil) fonala

$$\gamma^u(x) = \left\{ y \in S^d \colon \lim_{n \to -\infty} \operatorname{dist}(T^n x, T^n y) = 0 \right\}.$$

Valójában T stabil (instabil fonala) éppen a T^{-1} leképezés instabil (stabil) fonala. Esetünkben e fonalak könnyen leírhatók:

$$\gamma^s(x) = \{\tilde{x} + t\ e_s (\operatorname{mod} \mathbb{Z}^2) \colon t \in \mathbb{R}\}$$
$$\gamma^u(x) = \{\tilde{x} + t\ e_u (\operatorname{mod} \mathbb{Z}^2) \colon t \in \mathbb{R}\},$$

tehát ténylegesen mindkettő a tórusz e_s illetve e_u irányú feltekerésének (v.ö. 1.10 Példa) pályája.

Térjünk rá Hopf módszerére. Belátjuk, hogy $\forall f \in C(S^2)$-re az ergodtételben szereplő $\overline{f} = \text{const}$. Ez valóban elegendő, hiszen $\forall f \in L_2$-höz és $\forall \varepsilon$-ra található

$f_\varepsilon \in C(S^2)$, hogy $\|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$. Mármost $\lim_{n\to\infty} A_n f = \prod_{\mathcal{I}} f$ és $\lim_{n\to\infty} A_n f_\varepsilon = \prod_{\mathcal{I}} f_\varepsilon$, ahol $\prod_{\mathcal{I}}$ jelöli az $\mathcal{I}$-re való vetítést L_2-ben. Ha tehát $f_\varepsilon \xrightarrow{L_2} f$, akkor egyúttal $\prod_{\mathcal{I}} f_\varepsilon \xrightarrow{L_2} \prod_{\mathcal{I}} f$, de konstans függvények limesze konstans.

Automorfizmusról lévén szó, hivatkozunk a 2.8 ergodtételre és az 2.9 megjegyzésre:
egyrészt μ-m.m. $x \in S^2$-re $n \to \infty$ esetén

$$\frac{1}{n}(f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^{n-1}x)) \to \overline{f}(x)$$
$$\frac{1}{n}(f(x) + f(T^{-1}x) + \cdots + f(T^{-n-1}x)) \to \overline{f}^-(x),$$

és $\overline{f}^- = \overline{f}$ áll μ-m.m. x-re. Jelöljük

$$J := \{x \in S^2 \colon \overline{f}^-(x) = \overline{f}(x)\}. \tag{7.1}$$

Mivel f egyenletesen is folytonos, igazak a következő egyszerű megállapítások:

1. Ha $x, y \in \gamma_s$ és $\overline{f}(x)$ létezik, akkor $\overline{f}(y)$ is létezik, és $\overline{f}(x) = \overline{f}(y)$.

2. Ha $x, y \in \gamma_u$ és $\overline{f}^-(x)$ létezik, akkor $\overline{f}^-(y)$ is létezik, és $\overline{f}^-(x) = \overline{f}^-(y)$.

Igazoljuk 1.-et. f egyenletes folytonossága következtében $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta > 0$, hogy $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ hacsak $\varrho(x, x') < \delta$. Mivel $\varrho(T^k x, T^k y) \to 0$, ha $k \to \infty$ (valójában a konvergencia sebessége $|\lambda_s|^k$, vagyis exponenciális), ezért $\varrho(T^k x, T^k y) < \delta$, ha $k \geq k_0$. Ekkor

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(T^k x) - f(T^k y))\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{k_0-1}(\qquad) + \sum_{k=k_0}^{n-1}(\qquad)\right| \leq \frac{2\max|f|k_0}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

ha n elég nagy.

Könnyű látni, hogy ha $\overline{f}(x)$ és $\overline{f}^-(x)$ $\forall x \in S^d$-re létezne és egyenlő lenne, akkor 1. és 2. már automatikusan adnák, hogy $\overline{f} = \text{const}$ mindenütt. A bizonyítás hátralevő részében azzal a nehézséggel küzdünk meg, hogy vannak kivételes pontok.

Tekintsünk S^2-en egy elég kis P parallelogrammát, amelynek oldalai párhuzamosak az e_s illetve e_u sajátvektorokkal. Jelölje általában $x \in P$ esetén $\gamma_P^s(x)$ és $\gamma_P^u(x)$ a $\gamma^s(x)$ illetve $\gamma^u(x)$ fonál x-et tartalmazó összefüggő komponensét. Rögzítsünk egy $x_0 \in P$ pontot. Akkor nyilván

$$P = \bigcup_{x\in\gamma_P^u(x_0)} \gamma_P^s(x) = \bigcup_{x\in\gamma_P^s(x_0)} \gamma_P^u(x),$$

ami egyben P direkt szorzat alakban való előállítását is adja: $P = \gamma_P^s(x_0) \otimes \gamma_P^u(x_0)$, sőt a P-n vett Lebesgue-mérték is a tényezőkön vett Lebesgue-mértékek szorzatának konstansszorosa (a konstans $= |\sin\sphericalangle(e_s, e_u)|$). Nevezzük $\gamma_P^s(x)$-t (illetve

$\gamma_P^u(x)$-t) *jó fonálnak*, ha majdnem minden pontja $\in J$ (v.ö. (**??**)). Fubini tétele miatt $\gamma_P^u(x_0)$ majdnem minden x pontjára a rajta keresztül átmenő $\gamma_P^s(x)$ fonál jó. Feltehetjük, hogy $\gamma_P^s(x_0)$ jó fonál. Tekintsük a

$$B := \bigcup_{x \in \gamma_P^s(x_0) \cap J} (\gamma_P^u(x) \cap J)$$

halmazt. Egyrészt ismét Fubini tétele miatt $\mu(B) = \mu(P)$, mivel μ-m.m. $x \in \gamma_P^s(x_0)$-ra is a $\gamma_P^u(x)$ fonál jó.

Belátjuk, hogy $\forall y, z \in B$-re $\overline{f}(y) = \overline{f}^-(y) = \overline{f}(z) = \overline{f}^-(z)$, ami rögtön adja, hogy B-n az $\overline{f}(y) = \overline{f}^-(y)$ függvény konstans. Legyen $y \in \gamma_P^u(y') \cap J$, $z \in \gamma_P^u(z') \cap J$. Ekkor igaz a következő egyenlőséglánc:

$$\overline{f}(y) = \overline{f}^-(y) = \overline{f}^-(y') = \overline{f}(y') = \overline{f}(z') = \overline{f}^-(z') = \overline{f}^-(z) = \overline{f}(z)$$

(a hét egyenlőség rendre igaz, mert 1. $y \in J$; 2. $y \in \gamma_P^u(y')$; 3. $y' \in J$; 4. $z' \in \gamma_P^s(y')$; 5. $z' \in J$; 6. $z \in \gamma_P^u(z')$; 7. $z \in J$).

A tétel igazsága végül abból adódik, hogy egyrészt S^2 lefedhető véges sok fenti típusú parallelogrammával: $S^2 \subset \cup P_i$, másrészt azután mindegyik parallelogrammát centrálisan picit nagyítva, és felhasználva, hogy azokon a limesz μ-m.m. konstans, könnyen adódik, hogy ez a konstans minden parallelogrammára ugyanaz. $\square$

Megjegyzés. Hopf módszere az alapvető módszer kaotikus tulajdonságok: hiperbolicitás, ergodicitás, keverés, ... igazolására. Eberhard Hopf 1938-ban (és 1939-ben G. A. Hedlund is) ezzel a gondolattal mutatta meg kompakt, konstans negatív görbületű felületen adott geodetikus áramlás ergodikus voltát. A módszer páratlan előnye, hogy messzemenően általánosítható. Alkalmazható nemcsak síma leképezésekre, hanem szakadásos leképezésekre is, pl. a pék leképezésére is működik. Ennek ergodicitását ugyan tudjuk abból, hogy izomorf egy Bernoulli-automorfizmussal. Ugyanakkor erre is könnyen megtalálhatók a stabilis és instabil sokaságok, és a módszer működik.

Feladat. Keressük meg a pék leképezésére a stabilis és instabil invariáns sokaságokat.

8. fejezet

Invariáns mérték létezése

8.1 Példa. (A csaló pék leképezése: A Smale-patkó.) Tekintsük az $I^2 = [0,1]^2$ egységnégyzetet. Alkalmazzuk erre először az

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

lineáris leképezést, majd a $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \otimes \left[0, \frac{2}{5}\right]$ téglalapot az

$$Fx = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

transzformációval vigyük át az egységnégyzet felső élét érintő $\frac{2}{5}$ szélességű sávba. A két leképezés $T = F \circ A$ szorzata $1-1$ értelmű leképezése az $M_1 = \left(\left[0, \frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, 1\right]\right) \otimes [0,1]$ halmaznak az $M_2 = [0,1] \otimes \left(\left[0, \frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, 1\right]\right)$ halmazba. Az $I^2 \setminus M_1$ téglalapon nem szükséges értelmeznünk T-t, de ha mégis akarjuk, akkor nyilvan símán is folytathatjuk T-t (pl. TI^2 lehet éppen patkó alakú is).

Kérdés: milyen invariáns mértékei vannak a T leképezésnek, és ezek közül melyek azok, amelyek valamilyen értelemben természetesek? Mi ezeknek a mértékeknek a tartója?

Ezzel a kérdéskörrel kapcsolatos néhány alapvető eredménnyel foglalkozunk a következőkben. Az adott példa lezárásául még megjegyezzük, hogy a példa legegyszerűbb esete a Smale által az 1960-as években talált un. *patkó-leképezések*nek. Példánk esetén valóban létezik egy természetes invariáns mérték, amelynek a tartóját, másnéven *különös attraktorát* nevezzük *Smale-patkónak*.

Krülov-Bogoljubov tétele

A legtöbb alkalmazásnál csak a dinamika adott, azaz egy endomorfizmus–félcsoport vagy egy automorfizmus–csoport, viszont a dinamika fázistere valamilyen síma struktúrával is rendelkezik. Igy pl. egy differenciálegyenlet-rendszer $\mathbb{R}^n$-en vagy valamilyen M^n síma sokaságon értelmezett; s ha egyáltalán van invariáns mérték, akkor még az is lehet akár síma akár nem. Másrészt rengeteg invariáns mérték is létezhet (ilyenek pl. a periódikus pályaívekre koncentrált mértékek). Invariáns mérték konstrukciójának természetes és klasszikus módszerét adja Krülov és Bogolyubov tétele.

8.2 Tétel. (Krülov-Bogoljubov tétele) *Legyen M kompakt, metrikus tér és $T\colon M \to M$ folytonos endomorfizmus. Ekkor T-nek van μ invariáns Borel mértéke ($\mu(M) = 1$).*

Bizonyítás. Rögzítsük M tetszőleges x pontját, és legyen $\varphi \in C(M)$. Jelöljük $A^n_\varphi = A^n_\varphi(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^j x)$. Legyen továbbá $\Phi = \{\varphi_l\colon l \geq 1\}$ megszámlálható sűrű részhalmaza $C(M)$-nek. (N.B.: egy kompakt M tér csak akkor metrizálható, ha $C(M)$ szeparábilis; l. pl. Kelley: General Topology, 7. fejezet feladatai.)

Mivel minden φ_l-re az $A^n_{\varphi_l}$ számsorozat korlátos, azért tartalmaz konvergens részsorozatot. Lévén Φ megszámlálható, a Cantor-féle átlós eljárással kiválasztható egy olyan $n_j \to \infty$ részsorozat, hogy minden l-re

$$\lim_{j\to\infty} A^{n_j}_{\varphi_l} = L(\varphi_l).$$

Állítjuk, hogy

- $\lim\limits_{j\to\infty} A^{n_j}_\varphi = L(\varphi)$ létezik minden $\varphi \in C(M)$-re
- és $L(\varphi)$ folytonos és pozitív, lineáris funkcionál $C(M)$-en.

Az első állítás igazolásához rögzített $\varphi \in C(M)$-hez és tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz válasszuk először l-et, hogy $\|\varphi - \varphi_l\| < \varepsilon$. Akkor

$$\left|A^{n_j}_\varphi - L(\varphi_l)\right| \leq A^{n_j}_{|\varphi-\varphi_l|} + \left|A^{n_j}_{\varphi_l} - L(\varphi_l)\right|$$

ami $< 2\varepsilon$, ha j elég nagy. Következésképpen $\left\{A^{n_j}_\varphi : j \geq 1\right\}$ Cauchy-sorozat minden $\varphi \in C(M)$-re, így konvergens is. A második állítás innen már egyszerűen következik.

Riesz reprezentációs tétele miatt létezik egy valószínűségi Borel mérték, hogy $L(\varphi) = \displaystyle\int \varphi \,\mathrm{d}\mu$.

Mármost

$$\lim_{j\to\infty} A^{n_j}_{\varphi\circ T} = L(\varphi\circ T) = \int (\varphi\circ T)\,\mathrm{d}\mu.$$

(N.B. Itt használjuk, hogy T folytonos!) Viszont

$$\lim_{j\to\infty}\left|A^{n_j}_{\varphi\circ T} - A^{n_j}_\varphi\right| \leq \lim_{j\to\infty}\frac{2}{n_j}\left|\varphi(T^{n_j}x) - \varphi(x)\right| = 0$$

így
$$\int (\varphi \circ T)\,\mathrm{d}\mu = \int \varphi\,\mathrm{d}\mu$$
tetszőleges $\varphi \in C(M)$-re. A tétel állítása következik az alábbi lemmából.

8.3 Lemma. *μ akkor és csak akkor invariáns a T endomorfizmusra, ha minden $\varphi \in C(M)$-re*
$$\int \varphi\,\mathrm{d}\mu = \int (\varphi \circ T)\,\mathrm{d}\mu. \tag{8.1}$$

Bizonyítás. Jelöljük általában $T_*\mu$-vel a következő mértéket: $\forall A \in \mathcal{F}$-re $T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$. Így μ akkor és csak akkor T-invariáns, ha $T_*\mu = \mu$. Egyszerű integrálhelyettesítéssel
$$\int \varphi\,\mathrm{d}\mu = \int (\varphi \circ T)\,\mathrm{d}(T_*\mu). \tag{8.2}$$
Ha tehát μ T-invariáns, akkor (8.1) nyilvánvaló. Valóban: (8.1) nyilván fennáll mérhető halmazok indikátorfüggvényeire, és innen egyszerű approximációs gondolattal már adódik folytonos függvényekre is.

Tegyük fel most (8.1)-t, és legyen U nyílt halmaz, amelyre $\mu(\partial U) = 0$. Válasszuk a χ_U indikátorfüggvényhez folytonos függvények olyan csökkenő φ_n sorozatát, hogy $\varphi_n(x) \searrow \chi_U(x)$ minden $x \notin \partial U$-ra. Valóban, legyen $h_\varepsilon(x) = 1 - \varepsilon^{-1}\min\{\rho(x,U),\varepsilon\}$, és $\phi_n = h_{\varepsilon_n}$, ahol $\varepsilon_n \to 0$, ha $n \to \infty$. (8.2) áll minden φ_n függvényre, így Beppo-Levi tétele miatt χ_U-ra is. Következésképpen minden U nyílt halmazra, amelyre $\mu(\partial U) = 0$, $\mu(U) = \mu(T^{-1}U)$.

Tekintsünk befejezésül egy tetszőleges U nyílt halmazt, valamint annak $F = M \setminus U$ komplemeterét. A lemma bizonyításához elegendő belátnunk, hogy $\mu(F) = \mu(T^{-1}F)$. Tekintsük $\delta > 0$-ra az $G^\delta = \{x \in M \mid \rho(x,F) < \delta\}$ un. paralleltartományokat. Ezek nyíltak, és természetesen megszámlálható sok δ kivételével $\mu(\partial G^\delta) = 0$. Legyenek δ_n-ek ilyenek, és amellett tegyük fel, hogy $\delta_n \searrow 0$. Választásunk miatt $\mu(G^{\delta_n}) = \mu(T^{-1}G^{\delta_n})$. Innen $n \to \infty$ esetén $\bigcap T^{-1}G^{\delta_n} = T^{-1} \cap G^{\delta_n}$ és a mértékek folytonossági tulajdonsága miatt már adódik a lemma. □

Függelék

Beppo-Levi tétele. *Legyen (X,μ) mértéktér. Ha az f_n-ek integrálható függvények és $\sup_n \int f_n\, d\mu < \infty$, továbbá $f_n \nearrow f$, akkor f is integrálható és $\int f_n\,\mathrm{d}\mu \to \int f\,\mathrm{d}\mu$.*

Riesz reprezentációs tétele. *Legyen M kompakt metrikus tér. Ha $L\colon C(M) \to \mathbb{R}$ folytonos és pozitív (azaz $\forall\varphi \geq 0$-ra $L(\varphi) \geq 0$) lineáris funkcionál, akkor létezik egyetlen Borel mérték M-en, hogy $\forall\varphi \in C(M)$-re $\int \varphi\,\mathrm{d}\mu = L(\varphi)$.*

9. fejezet

Markov-leképezések

Ebben a fejezetben egydimenziós leképezésekkel foglalkozunk.

9.1 Definíció. Az $f\colon [0,1] \to [0,1]$ leképezést Markov leképezésnek nevezzük, ha létezik diszjunkt nyílt intervallumok véges vagy megszámlálhatóan végtelen rendszere $\{I_j\colon I_j \subset [0,1]\}$, hogy

a) $m([0,1] \setminus \bigcup\limits_j I_j) = 0$, ahol m a Lebesgue-mérték;

b) $\forall j$-re $f|_{I_j} \in C^1(I_j)$ és
$$f(I_j) = (0,1);$$

c) megadható $\beta > 1$, hogy $|f'(x)| \geq \beta$;

d) megadható $C > 0$ és $0 < \gamma < 1$, hogy
$$\left|\frac{f'(x)}{f'(y)} - 1\right| \leq C|x-y|^\gamma,$$
hacsak alkalmas j-re $x, y \in I_j$.

Megjegyzések

1. Mindenütt az alábbiakban f^n jelöli egy leképezés n-edik iteráltját; azaz $f^1 = f$, és $f^n = f \circ f^{n-1}$.

2. A b) tulajdonság az únṀarkov-tulajdonság erős formája, c) jelenti az f leképezés egyenletes hiperbolicitását, míg d) a módszereink számára alapvető disztorziós becslések egyik változata.

3. Példák intervallum-leképezésekre:

   (i) Markov-leképezés az $f(x) = qx - [qx]$, ahol $q \geq 2$ egész szám; (ha $q > 1$ nem egész, akkor a leképezésre ugyan teljesül a), c) és d), azonban nem teljesül a b) Markov-tulajdonság).

(ii) az $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ Gauss-leképezés (l. 1.8 Példa). (N.B. Itt c) nem áll, viszont a), b) és d) teljesülnek. Valóban d) áll $\gamma < \frac{1}{2}$-el. Ugyanis $x, y \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ esetén

$$\begin{aligned}
\left|\frac{y^2}{x^2} - 1\right| &\le (y+x)\frac{1}{x^2}|y-x| \le \\
&\le \frac{2}{n}(n+1)^2|y-x|^{1-\gamma}|y-x|^\gamma \le \\
&\le \frac{2}{n}(n+1)^2\frac{1}{n^{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}}|y-x|^\gamma = \\
&= \frac{2}{n^{2-\gamma}}2^{1+\gamma}(n+1)^{1+\gamma}|y-x|^\gamma \le \\
&\le 2^{2+\gamma}n^{2\gamma-1}|y-x|^\gamma.
\end{aligned}$$

Az elmélet fő eredménye Rényi Alfréd tételének (1957) következő általánosítása:

9.2 Tétel. *Ha f a $[0,1]$ intervallum Markov-leképezése, akkor $[0,1]$-en létezik egyetlen olyan f-invariáns valószínűségi mérték μ, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

(i) $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}$ *Hölder-folytonos;*

(ii) $0 < \inf \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(x) \le \sup \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(x) < \infty$;

(iii) *a μ mértékre nézve f ergodikus;*

A 9.2 tétel bizonyítása. A Krülov–Bogoljubov tétel alapgondolatát használva vezessük be az $m_n := f_*^n m$ jelölést, azaz $m_n(A) = m(f^{-n}A)$ minden A Borel–halmazra. A különbség annyi, hogy mivel most az invariáns mérték sűrűségfüggvényét kell megkonstruálnunk, ezért a mértékek gyenge kompaktsága helyett a sűrűségfüggvények kompaktságát biztosító Arzela–Ascoli tételt fogjuk használni.

b) és d) miatt f' Hölder-folytonos, azaz $\forall j$-re $\exists \alpha_j (= \sup_{x\in I_j} f'(x)) < \infty$, hogy $\forall x, y \in I_j$-re $|f'(x) - f'(y)| \le C\alpha_j|x-y|^\gamma$. Következésképp f mindegyik I_j intervallumot monoton és invertálható módon képezi le $(0,1)$-re.

Vezessük be felbontásoknak a következő finomodó sorozatát:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &:= \{(0,1)\}, \\
\eta_1 &:= \{I_j\},
\end{aligned}$$

azaz $\forall I_j$ olyan maximális részintervallum, amelyet f 1-1 értelmű módon és simán képez $(0,1)$-re. Ennek általánosításaképp:

$$\begin{aligned}&\eta_n := \{I_{j_1,\dots,j_n}\}, \text{ ahol } \forall I_{j_1,\dots,j_n} \text{ intervallumra az}\\ &f^n : I_{j_1,\dots,j_n} \to (0,1) \text{ leképezés homeomorf.}\end{aligned}$$

Ezt a definiciót ekvivalens módon így is bevezethetjük:

b)-ből következik, hogy $\forall j$-re létezik oly $f_j\colon I_j \to (0,1)$ homeomorf leképezés, hogy $\forall x \in \bigcup\limits_j I_j$-re $f(x) = f_j(x)$ ha $x \in I_j$. Ekkor $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$ pontosan azt jelenti, hogy

$$f^n(x) = f_{j_n} \circ f_{j_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{j_1}(x).$$

Érdemes megjegyezni, hogy ha $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$, akkor $1 \le l \le n$-re $f^l(x) \in I_{j_{l+1},\dots,j_n}$ (persze $I_\emptyset := (0,1)$). Vezessük be a következő jelölést: $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$ -re

$$\eta_n(x) := I_{j_1,\dots,j_n}.$$

Könnyű látni, hogy $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$-re

$$J_n(x) := |(f^n)'(x)| = |f'_{j_n}(f^{n-1}(x)) \cdot f'_{j_{n-1}}(f^{n-2}(x)) \ldots f'_{j_1}(x)|. \tag{9.1}$$

Most már elkezdhetjük a tulajdonképpeni bizonyítást. Szűkítsük először a fázisteret a reguláris pontok teljes mértékű M_0 halmazára:

$$M_0 := \bigcap_{n\ge 0} \bigcup_{j_1,\dots,j_n} I_{j_1,\dots,j_n}.$$

Nyilvánvalóan M_0 invariáns halmaz (itt erős értelemben, azaz $M_0 = f^{-1}M_0 = fM_0$), és $m(M_0) = 1$. Bizonyításunk a következő fő lépésekből áll:

1. Belátjuk, hogy $\forall x \in (0,1)$-re

$$\frac{\mathrm{d}m_n}{\mathrm{d}m}(x) := S_n(x) := \sum_{y\in f^{-n}(x)} \frac{1}{J_n(y)}. \tag{9.2}$$

Valójában ez (9.1) és az előtte mondottak egyszerű folyománya.

2. Igazoljuk a következő technikai alap-lemmát:

9.3 Lemma. *Léteznek $C_1, C_2 > 0$, hogy $\forall n > 1$, $\forall x \in M_0$ és $\forall y \in \eta_n(x)$ esetén*

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} \le \exp\left[C_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right]$$

továbbá

$$\left|\frac{J_n(y)}{J_n(x)} - 1\right| \le C_2|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma. \tag{9.3}$$

3. Lemmánk egyszerű következménye lesz az

9.4 Lemma.

(i) $\exists K > 0$, *hogy* $\forall n \geq 1$*-re és* $\forall x \in (0,1)$*-re* $S_n(x) \leq K$*;*

(ii) $\forall n \geq 1$*-re és* $\forall x, y \in (0,1)$*-re*

$$|S_n(x) - S_n(y)| \leq S_n(x) C_2 |x-y|^\gamma.$$

4. Az eddigiek alapján mármost így okoskodhatunk:

Jelölje $H_n(x) := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} S_\ell(x)$ $(x \in (0,1))$ az $A_n m$ mérték sűrűségfüggvényét. A 9.4 Lemmából következik: $\forall n \geq 1$-re és $\forall x, y \in (0,1)$-re

$$\sup_{n,x} H_n(x) \leq K, \tag{9.4}$$

$$|H_n(x) - H_n(y)| \leq H_n(x)\ C_2\ |x-y|^\gamma. \tag{9.5}$$

E két tulajdonságból először is adódik, hogy $H_n \colon (0,1) \to \mathbb{R}$ egyértelműen kiterjeszthető egy folytonos $\overline{H}_n \colon M = [0,1] \to \mathbb{R}$ függvénnyé, amelyre továbbra is teljesülnek az (9.4)–(9.5) becslések. Mivel a $\{\overline{H}_n\}$ sorozat egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos az M kompaktumon, az Arzela–Ascoli tétel miatt alkalmas $\{\overline{H}_{n_j}\}$ részsorozata egyenletesen konvergál valamely $H \colon M \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez, amelyre ugyancsak áll:

$$\sup_{x \in M} H(x) \leq K, \tag{9.6}$$

$$|H(x) - H(y)| \leq H(x) C_2 |x-y|^\gamma, \tag{9.7}$$

(9.6)–(9.7)-ből természetesen

$$|H(x) - H(y)| \leq K C_2 |x-y|^\gamma, \tag{9.8}$$

is látszik.

Tételünk állítása adódni fog a következő lemmából:

9.5 Lemma. *A* $\mu(A) = \displaystyle\int_A H(x) m\,(\mathrm{d}x)$ *mértékre igazak a 9.2 Tétel állításai.*

Térjünk rá lemmáink bizonyítására.

A 9.3 Lemma bizonyítása. (9.1) és 9.1 Definíció d) pontja alapján

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} = \left| \prod_{\ell=0}^{n-1} \frac{f'(f^\ell(y))}{f'(f^\ell(x))} \right| \leq \prod_{\ell=0}^{n-1} \left[1 + C|f^\ell(x) - f^\ell(y)|^\gamma\right],$$

$y \in \eta_n(x)$-ból egyúttal $f^\ell(y) \in \eta_{n-\ell}(x)$, így 9.1 Definíció c) pontja miatt

$$|f^\ell(x) - f^\ell(y)| \leq \lambda^{n-\ell} |f^n(x) - f^n(y)|$$

ahol $\lambda = \beta^{-1}$. A $\lambda_1 = \lambda^\gamma$ jelöléssel élve, és ismételten használva a $1 + x \le e^x$ egyenlőtlenséget,

$$\begin{aligned}\frac{J_n(y)}{J_n(x)} &\le \prod_{\ell=0}^{n-1}\left[1 + \lambda_1^{n-\ell}|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right] \le \\ &\le \prod_{\ell=1}^{n}\left[1 + \lambda_1^{\ell}|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right] \le \\ &\le \prod_{\ell=0}^{\infty}\left[1 + \lambda_1^{\ell}|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right] \le \\ &\le \exp\sum_{\ell=0}^{\infty}\lambda_1^{\ell}|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma = \\ &= \exp\left[|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\frac{1}{1-\lambda_1}\right].\end{aligned}$$

$C_1 = (1 - \lambda_1)^{-1}$ választással adódik az első egyenlőtlenség.

A második igazolásához válasszuk a $B, B' > 0$ konstansokat úgy, hogy $\forall\ 0 \le z \le C_1$-re $\exp z \le 1 + Bz$ és $(1 + Bz)^{-1} \ge 1 - B'z$ teljesüljenek. Akkor

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} \le 1 + BC_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma,$$

valamint x és y felcserélésével

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} \ge [1 + BC_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma]^{-1} \ge 1 - B'C_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\ .$$

Összesítve a két becslést

$$\left|\frac{J_n(y)}{J_n(x)} - 1\right| \le \max\{B, B'\}C_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\ . \qquad \square$$

9.4 Lemma bizonyítása. Egyszerű integrálhelyettesítéssel $\forall I_{j_1,\dots,j_n}$-re és $\forall y \in I_{j_1,\dots,j_n}$-re

$$\begin{aligned}1 = m((0,1)) = \int_{I_{j_1,\dots,j_n}} J_n(x)\,\mathrm{d}x = J_n(y)\int_{I_{j_1,\dots,j_n}}\frac{J_n(x)}{J_n(y)}\,\mathrm{d}x \le \\ \le J_n(y)\int_{I_{j,\dots,j_n}}\exp\left[C_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right]\,\mathrm{d}x \le J_n(y)\exp(C_1)m(I_{j_1,\dots,j_n}).\end{aligned} \tag{9.9}$$

(9.2) alapján annak figyelembevételével, hogy minden egyes $I_{j_1,\dots,j_n}$ intervallum $f^{-n}(x)$ pontosan egy elemét tartalmazza

$$S_n(x) \le \exp C_1.$$

Ezzel (i)-t beláttuk.

(ii) bizonyításához vegyük észre, hogy

$$S_n(x) - S_n(y) = \sum_{z \in f^{-n}(x)} \frac{1}{J_n(z)} - \sum_{z' \in f^{-n}(y)} \frac{1}{J_n(z')}$$

kifejezésben minden egyes $I_{j_1,\dots,j_n}$ intervallumba pontosan 1-1 z illetve z' érték esik, így (9.3) figyelembevételével

$$|S_n(x) - S_n(y)| \leq \sum_{z \in f^{-n}(x)} \frac{1}{J_n(z)} \left| 1 - \frac{J_n(z)}{J_n(z')} \right| \leq C_2 S_n(x)|x-y|^\gamma. \qquad \square$$

9.5 Lemma bizonyítása.

(i) következik (9.8)-ból.

(ii) -ben a sup-ra vonatkozó állítás éppen (9.6), míg ha $\inf H(x) = 0$, akkor (9.7)-ből $H(x) \equiv 0$ adódna, ami ellentmondás.

(iii), vagyis az ergodicitás igazolásához gondoljuk meg először, hogy ha $A \in \mathcal{I}$, akkor létezik olyan B, hogy egyrészt $\mu(A \circ B) = 0$, másrészt $T^{-1}B = B = TB$, azaz B erősen invariáns halmaz, más szóval teljes orbitokból áll. Tegyük fel tehát, hogy A nemtriviális erősen invariáns halmaz. μ és m ekvivalenciája miatt $0 < m(A) < 1$.

Válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Lebesgue sűrűségi tétele miatt $\exists I_{j_1,\dots,j_n}$, hogy

$$m(A \cap I_{j_1,\dots,j_n}) > (1-\varepsilon) m(I_{j_1,\dots,j_n})$$

azaz

$$m(I_{j_1,\dots,j_n} \setminus A) < \varepsilon m(I_{j_1,\dots,j_n}).$$

Lévén $f^n I_{j_1,\dots,j_n} = [0,1]$, ezért, $1 = \int J_n(x)\,\mathrm{d}x$. A középértéktételből adódik, hogy $\exists \xi \in I_{j_1,\dots,j_n}$, amelyre $J_n(\xi) = m\left(I_{j_1,\dots,j_n}\right)^{-1}$.

Így

$$\max_{x \in I_{j_1,\dots,j_n}} J_n(x) = J_n(\xi) \max_{x \in I_{j_1,\dots,j_n}} \frac{J_n(x)}{J_n(\xi)} \leq \frac{e^{C_1}}{m(I_{j_1,\dots,j_n})}.$$

Tehát

$$m\left([0,1] \setminus A\right) = \int_{I_{j_1,\dots,j_n} \setminus A} J_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{e^{C_1}}{m(I_{j_1,\dots,j_n})} m(I_{j_1,\dots,j_n)} \setminus A) \leq$$
$$\leq \frac{e^{C_1}}{m(I_{j_1,\dots,jx_n})} \varepsilon m(I_{j_1,\dots,j_n}) = \varepsilon e^{C_1}$$

Ez igaz minden $\varepsilon > 0$-ra, ezért $m(A) = 1$, ellentmondás.

Befejezésül térjünk rá a tételben szereplő abszolút folytonos invariáns mérték unicitására. Tegyük fel indirekte, hogy az általunk konstruált μ mellett van még egy $\nu \neq \mu$, a Lebesgue-mértékre nézve abszolút folytonos invariáns mérték. Mivel μ sűrűsége pozitív, azért ν is abszolút folytonos μ-re. Jelölje $\rho = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$. Tetszőleges $h \in L_\infty(\mu)$-re igaz:

$$\int \rho h \, \mathrm{d}\mu = \int h \, \mathrm{d}\nu = \int h \circ T \, \mathrm{d}\nu = \int \rho(h \circ T) \, \mathrm{d}\mu = \int (\rho \circ T^{-1}) h \, \mathrm{d}\mu$$

ahol használtuk mind ν, mind μ invarianciáját. Innen $\rho \circ T^{-1} = \rho$ μ-m. m., azaz ρ invariáns függvény. μ ergodicitása miatt ezért $\rho \equiv \text{const}$. Azonban lévén μ és ν valószínűségi mértékek, azért $\rho \equiv 1$, vagyis $\mu = \nu$. □

Függelék

Hölder-folytonos függvények. Legyenek (M, d), (M', d') metrikus terek. Az $f\colon M \to M'$ leképezés Hölder-folytonos az $x \in M$ pontban, ha megadhatók $C > 0$ és $0 < \gamma < 1$ konstansok és $x \in U \subset M$ környezet, hogy $\forall y, z \in U$-ra

$$d'(f(y), f(z)) \leq C d(y, z)^\gamma \ .$$

(A jól ismert Lipschitz-tulajdonság épp az analóg követelmény $\gamma = 1$-gyel.)

Arzela–Ascoli tétel. Jelölje $C(M)$ az (M, d) kompakt metrikus téren értelmezett $M \to \mathbb{R}$ folytonos függvények halmazát. Az $F \subset C(M)$ részhalmaz akkor és csak akkor kompakt, ha

(i) F zárt;

(ii) $\forall x \in M$-re az $F[x] := \{f(x)\colon f \in F\}$ $(\subset \mathbb{R})$ halmaz korlátos;

(iii) az F-beli függvények egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak (azaz $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy $\forall f \in F$-re és $\forall x, y \in M$-re $d(x, y) < \delta$-ból $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ következik).

Felbontás. Legyen $(M, \mathcal{F}, \nu)$ valószínűségi mező. Pozitív mértékű halmazoknak egy megszámlálható $\mathcal{P} = \{A\}$ családját felbontásnak nevezzük, ha (i) $A \neq B \in \mathcal{P}$-ből következik $\nu(A \cap B) = 0$; (ii) $\nu(M \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A) = 0$.

Lebesgue sűrűségi tétele. Az $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaznak az $x \in \mathbb{R}$ pont sűrűségi pontja, ha tetszőleges $\{I_n\}$ $(x \in I_n)$ intervallumsorozatra $\lim_{n \to \infty} m(A \cap I_n)/m(I_n) = 1$. Állítás: Az A halmaz m-majdnem minden pontja A-nak sűrűségi pontja.

10. fejezet

Kolmogorov–Arnold–Moser tétel

A tételt a legegyszerűbb esetre mondjuk ki és bizonyítjuk: a körgyűrű síma forgatásának kis perturbációjára.

Jelölje $A := (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})) \times [a, b] = \{(x, y) \colon 0 \le x < 2\pi, \alpha \le y \le b\}$ a körgyűrűt (annulust), ahol $0 < a < b$. Tekintsük ennek síma, monoton forgatását, azaz a $T_0 \colon A \to A$

$$T_0(x, y) := (x + \gamma(y), y)$$

leképezést, ahol $\gamma \in C^1$ és $\gamma'(y) > 0$, továbbá legyen a $T \colon A \to A$ diffeomorfizmus

$$T(x, y) := (x + \gamma(y) + f(x, y), y + g(x, y))$$

ennek kis perturbációja. Az ilyen leképezéseket „twist"-leképezéseknek nevezzük. Az egyszerűség kedvéért azonnal feltesszük, hogy $\gamma(y) = \gamma \cdot y$.

A T_0 leképezésre nézve nyilván valamennyi $S_y := \{(x, y) \colon 0 \le x < 2\pi\}$, $y \in [a, b]$ körvonal invariáns, T_0 mindegyiken forgatás; S_y-n a forgatási szám (amely mindig 1-re normált) $\frac{1}{2\pi}\gamma y$. Másszóval, a T_0 leképezés teljesen integrálható, és mindegyik S_y ún. invariáns tórusz. Az alapkérdés az, mi történik az invariáns tóruszoknak ezzel a „jólfésült" strukturájával a T leképezésnél, ahol f és g megfelelően kicsik?

Már Poincaré észrevette, hogy azok az invariáns tóruszok, ahol $\omega = \frac{1}{2\pi}\gamma y$ racionális (az ún. rezonáns tóruszok), eltűnnek tipikus kis perturbáció esetén. Az 50-es évekig azt hitték, hogy ugyanez történik a nem-rezonáns tóruszokkal is, sőt azt is gondolták, hogy kis perturbáció már ergodikus leképezéshez is vezethet (a 20-as években Fermi adott erre – hibás – bizonyítást).

1954-ben azonban Kolmogorov észrevette, hogy ennek az ellenkezője igaz: a tóruszok többsége túléli a kis perturbációt. Nevezetesen megmutatta, hogy ez áll az *erősen nem-rezonáns* tóruszokra, vagyis amelyek ω forgatási száma eleget tesz a következő *diofantoszi feltételnek* : létezik olyan $\nu; \mu > 0$, hogy minden $p, q \in \mathbb{Z}$-re

$$|\omega q - p| \geq \frac{\nu}{|q|^\mu}. \tag{10.1}$$

10.1 Lemma. *A diofantoszi feltételnek eleget tevő ω-k halmaza teljes mértékű.*

Bizonyítás Jelölje $\nu, \mu > 0$-ra

$$\Delta_{\nu,\mu} := \{\omega\colon 0 \leq \omega \leq 1 \text{ és } (10.1) \text{ teljesül } \forall p, q (\neq 0) \in \mathbb{Z} \text{ -re}\}.$$

Nyilván $\mu < \mu'$ esetén $\Delta_{\nu,\mu} \subset \Delta_{\nu,\mu'}$, így feltehetjük, hogy $\mu > 1$. Viszont

$$(\Delta_{\nu,\mu})^c = \bigcup_{p,q\neq 0} \left\{\omega\colon 0 \leq \omega \leq 1 \text{ és } \left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{\nu}{|q|^{\mu+1}}\right\}$$

így

$$m((\Delta_{\nu,r})^c) \leq 2\sum_{q=1}^{\infty}(q+1)\frac{\nu}{q^{\mu+1}} \leq 4\nu\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^\mu}$$

ami tetszőlegesen kicsi, ha $\mu > 1$ és ν elég kicsi. □

Térjünk rá a KAM-tétel pontos kimondására. Itt azzal az esettel foglalkozunk, amikor f és g analitikus függvények. Feltesszük tehát, hogy az $f(x, y)$ és $g(x, y)$ komplex változós függvények 2π-periódikusak az x szög-változóban, és analitikusak a

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2\colon |\operatorname{Im} x| < r_0, y \in \mathcal{D}_1\},$$

tartományban, ahol $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{C}$ nyílt tartomány, amelyre $[a, b] \subset \mathcal{D}_1$.

Megjegyezzük, hogy az általunk tekintett leképezésekre vezethető vissza az ún. redukált 3-test probléma a körös esetben. Az n-test probléma n darab pontszerű részecske gravitációs kölcsönhatással mozgó rendszerének leírását jelenti. A 2-test probléma épp a Kepler-feladat, az egyenletek megoldhatók, a 2 test kúpszelet alakú pályákon mozog, amelyek egyik fókusza a rendszer súlypontjában van. A redukált 3-test problémában azt az esetet nézzük, amikor a 3 részecske közül az egyiknek a tömege igen kicsi és úgy tekintjük a rendszert, mint a 2-test probléma perturbáltját. Abban a speciális esetben, amikor a 2-test problémában a részecskék pályái körök, a redukált 3-test probléma a körgyűrű általunk tekintett leképezésére vezet. (Megjegyezzük, hogy a legtöbb bolygó Nap körüli pályái nem nagyon térnek el a kör-pályáktól.)

Hamilton-rendszerek alapvető tulajdonsága, hogy rendelkezik síma invariáns mértékkel, ez a jól ismert Liouville-mérték. Ennek szellemében a körgyűrű diffeomorfizmusai esetén feltehetnénk, hogy ez a Lebesgue-mérték, a terület. Ennél azonban gyengébb hipotézist fogadunk el, az ún.

10.2 Feltételt. (Metszet-feltétel) *Tekintsük $\forall y \in [a, b]$-re az S_y körvonal $T\,S_y := \{T(x, y)\colon x \in [0, 2\pi)\}$ képét. Feltesszük, hogy $\forall y \in [a, b]$-re*

$$T\ S_y \cap S_y \neq \emptyset.$$

10.3 Tétel. (KAM-tétel) *Tegyük fel, hogy* $T\colon A \to A$ *(ahol* $b - a = 1$*)*

$$T(x, y) := (x + \gamma y + f(x, y), y + g(x, y)) \tag{10.2}$$

a körgyűrű twist-diffeomorfizmusa, amely eleget tesz a metszet-feltételnek. Tegyük fel továbbá, hogy az x*-ben* 2π*-periódikus* $f(x, y), g(x, y)$ *komplex változós függvények analitikusak a* $\mathcal{D}$ *tartományban. Akkor* $\forall\gamma \leq 1$*-re,* $\forall\mathcal{D}$*-re és* $\forall\varepsilon > 0$*-ra, továbbá* $\forall\gamma > 0$*,* $\forall\mu > 1$*-re létezik olyan* $\delta = \delta(\varepsilon, \mathcal{D}, \nu, \mu)$*, hogy ha* $\forall x, y \in \mathcal{D}$*-re*

$$|f|, |g| < \gamma \cdot \delta \tag{10.3}$$

akkor minden $\omega/2\pi \in \Delta_{\nu,\mu} \cap (1/2\pi[a + \varepsilon, b - \varepsilon])$*-re* T*-nek van*

$$\zeta := \zeta(\xi) := (\xi + u(\xi), v(\xi)) \tag{10.4}$$

invariáns görbéje, ahol u *és* v 2π*-periódikus,* $|Im\,\xi| < \dfrac{r_0}{2}$*-ben analitikus függvények. A* ξ *paraméter megálasztható úgy, hogy* $(T\zeta)(\xi) = \zeta(\xi + \omega)$*, továbbá*

$$|u| + |v - \gamma^{-1}\omega| < \varepsilon. \tag{10.5}$$

Megjegyzések.

1. Tételünkben a megengedhető perturbációnak pusztán a γ-tól való függése látszik. A módszer javításával azt is bebizonyították, hogy $\forall\gamma \leq 1$-re, $\forall\mathcal{D}$-re, $\forall\varepsilon > 0$-ra, továbbá $\forall\nu > 0$, $\forall\mu > 1$-re létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon, \mathcal{D}, \mu)$, hogy ha $\forall x, y \in \mathcal{D}$-re
$$|f|, |g| < \gamma\delta\nu^2$$
akkor igaz a tétel állítása. Sőt, az invariáns tóruszok ω-tól Lipschitz-folytonosan függenek, és a fázistérnek legalább $1 - O(\nu)$ mértékű részhalmazát alkotják.

2. Tételünk állítása közvetlenül kiterjeszthető többdimenziós Hamilton rendszerek esetére. A diofantoszi feltétel ez esetben: $\exists\nu > 0$ és $\exists\mu > 0$ konstansok, hogy $\forall k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$-ra
$$|(k, \omega)| \geq \frac{\nu}{|k|^\mu}$$
ahol $|k| := |k_1| + \cdots + |k_n|$, $\omega := (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, és n a rendszer szabadsági fokainak száma.

3. Fontos megjegyzés, hogy $\mu < 1$ esetén $\Delta_{\nu,\mu} = \emptyset$. Ugyanis nyilván
$$\inf_{p,q \in \mathbb{Z}} |q||\omega q - p| \leq \inf_{Q \in \mathbb{Z}_+} \min_{0 \leq q \leq Q} q|\omega q - p| \leq \inf_{Q \in \mathbb{Z}_+} Q \min_{0 \leq q \leq Q} |\omega q - p|$$
viszont a skatulya-elv folytán
$$\min_{0 \leq q \leq Q} |\omega q - p| \leq \frac{1}{Q}\ .$$
Tehát $\Delta_{\nu,1} = \emptyset$ ha $\nu \geq 1$, amiből természetesen $\mu < 1$-re $\Delta_{\nu,\mu} = \emptyset$ is adódik.

Függelék

Analitikus függvények. Legyen $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ a komplex sík egyenesen összefüggő, nyílt tartománya. Az $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ függvényről azt mondjuk, hogy analitikus a $\mathcal{D}$ tartományban, ha $\mathcal{D}$ minden pontjában differenciálható. Akkor az is igaz, hogy minden $z \in \mathcal{D}$ elég kis környezetében a függvény konvergens hatványsorba fejthető.

Ha $I \subset \mathbb{R}$ véges intervallum, akkor az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt valós analitikusnak mondjuk, ha $\forall x \in I$-re x alkalmas környezetében a függvény konvergens hatványsorba fejthető. Ez esetben létezik olyan $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő, nyílt tartomány és $f_1\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, hogy f_1 analitikus és $f_1 \mid I = f$.

Cauchy-féle integráltétel. Ha f analitikus a $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ egyenesen összefüggő nyílt tartományban, akkor bármely a $\mathcal{D}$-ben fekvő zárt Γ út mentén integrálva

$$\oint f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Fourier transzformált. Ha az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódikus függvény integrálható a $[0, 2\pi]$ intervallumon, akkor Fourier együtthatói

$$f_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Az f formális Fourier sora

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}.$$

11. fejezet

A homológikus egyenlet megoldása. A kis nevezők problémája

Itt egy látszatra távoli kérdéssel foglalkozunk, amely mégis a KAM-tételre adott bizonyításunk kiindulópontja lesz, és emellett frappánsan mutatja a diafantoszi feltétel szerepét a kis nevezők problémájának feloldásában.

A homológikus egyenlet a következő:

$$w(x+\omega) - w(x) = h(x), \tag{11.1}$$

ahol $x \in S = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ és $\dfrac{\omega}{2\pi}$ irracionális szám. Ennek megoldását keressük adott h esetén. Itt is az analitikus függvények körében dolgozunk, tehát feltesszük, hogy w és h 2π-periódikus komplex változós függvények, amelyek analitikusak az $|\operatorname{Im} x| \leq r$ sávban ($r > 0$).

Természetes lesz a Fourier-transzformáltakat használnunk, tehát legyen

$$\begin{aligned} h_k &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ w_k &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(x)e^{-ikx}\mathrm{dx}. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Akkor – egyelőre formális megoldást keresve –

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum e^{ikx}h_k \\ w(x) &= \sum e^{ikx}w_k \end{aligned} \tag{11.3}$$

és

$$w_k = \frac{h_k}{e^{ikw}-1}, \qquad \text{ha } k \neq 0, \tag{11.4}$$

végül feltehető, hogy

$$w_0 = 0.$$

A megoldhatóság triviális szükséges feltétele

$$h^* := h_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Kérdés, hogy a (11.4) együtthatókkal értelmezett (11.3) Fourier-sor mikor konvergál (és oldja meg a (11.1) egyenletet). Mivel

$$|\sin x| \geq \frac{1}{2}\min_p |x - p\pi| = \frac{\pi}{2}\min_p \left|\frac{x}{\pi} - p\right|,$$

azért – a diofantoszi feltételt is használva –

$$|e^{ik\omega} - 1| = 2\left|\sin\frac{k\omega}{2}\right| \geq \pi \min_p \left|\frac{k\omega}{2\pi} - p\right| \geq \pi\frac{\nu}{|k|^\mu}.$$

Mivel h analitikus $|\mathrm{Im}\, x| \leq r$-ben, ezért

$$\sup_{|\mathrm{Im}\ x|\leq r} |h(x)| = K < \infty$$

és

$$|h_k| \leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\pm ir}^{\pm ir+2\pi} h(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right| = Ke^{-|k|r}.$$

Ezért

$$|w_k| \leq Ke^{-|k|r}\left(\pi\frac{\nu}{|k|^\mu}\right)^{-1}.$$

Tehát $\sum |w_k| < \infty$, sőt az $|\mathrm{Im}\, x| \leq \varrho$ $(0 < \varrho < r)$ sávban

$$|w(x)| \leq \sum_{k\neq 0}\left|\frac{h_k}{e^{ik\omega} - 1}e^{ikx}\right| \leq \sum_{k\neq 0} Ke^{-|k|r}\frac{|k|^\mu}{\nu\pi}e^{|k|\varrho}$$

ahonnan $|\mathrm{Im}\, x| \leq \varrho$-ra

$$|w(x)| \leq C_1\frac{K}{(r-\varrho)^{\mu+1}},$$

ugyanis

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x(r-\varrho)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(r-\varrho)^{\mu+1}}\int_0^\infty y^\mu e^{-y}\,\mathrm{d}y.$$

Tehát igaz a

11.1 Tétel.

1. *A homológikus egyenletnek – additiv konstanstól eltekintve – egyetlen folytonos megoldása lehet, ha* $\frac{\omega}{2\pi}$ *irracionális.*

2. Ha h analitikus az $|\mathit{Im}\, x| \le r$ sávban, $\int_0^{2\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = 0$, és ω diofantoszi, akkor létezik az egyenlet $w = Lh$ megoldása, amelyre az $|\mathit{Im}\, x| \le \varrho$ sávban ($0 < \varrho < r$ esetén)

$$|w(x)| \le C_1 \frac{K}{(r-\varrho)^{\mu+1}},$$

feltéve, hogy $\int_0^{2\pi} w(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ($K = \max\limits_{|\mathrm{Im}\ x| \le r} h(x)$).

A tétel első állítása azért következik a fentebb mondottakból, mert folytonos h függvény esetén a w_k együtthatók (11.4) által egyértelműen meghatározottak, és a kérdés csupán az, van-e egyáltalán $w(x)$ függvény ezekkel a Fourier-együtthatókkal.

12. fejezet

Az invariáns tórusz formális felírása

A T leképezés invariáns görbéjét azonnal a

$$\zeta := (\xi + u(\xi), v(\xi)) \tag{12.1}$$

alakban keressük, ahol ξ a 2π-periódikus szög-paraméter, vagyis feltesszük, hogy u és v 2π-periódikus függvények, mindketten analitikusak az $|\mathrm{Im}\,\xi| \le \dfrac{r_0}{2}$ sávban. Feltesszük továbbá, hogy

$$(T\zeta)(\xi) = \zeta(\xi + \omega)$$

ahol $\dfrac{\omega}{2\pi}$ irracionális és $|u| + |v - \gamma^{-1}\omega|$ kicsi.

Az (12.1) invariancia-feltétel pontosan azt jelenti, hogy

$$\xi + u(\xi) + \gamma v(\xi) + f(\xi + u(\xi), v(\xi)) = \xi + \omega + u(\xi + \omega), \tag{12.2}$$

$$v(\xi) + g(\xi + u(\xi), v(\xi)) = v(\xi + \omega). \tag{12.3}$$

Ezt az alapegyenlet-rendszert kell megoldanunk. T_0 perturbációjának egyszerűbb esete lenne, ha $f(x, y) = \lambda f_0(x, y)$, $g(x, y) = \lambda g_0(x, y)$-t választanánk, ahol λ kis paraméter. Ez azonban nem jelent lényeges könnyebbséget, ezért inkább feltesszük, hogy $f(x, y) = f(x, y, \lambda)$, $g(x, y) = g(x, y, \lambda)$ ahol f és a g-nek a kis, λ paramétertől függése is analitikus, amiből itt azt fogjuk használni, hogy a hatványsor véges részletösszegei a megfelelő maradéktaggal közelítenek. Ekkor $u(\xi)$ és $v(\xi)$ is függni fog λ-tól, ismét feltesszük, hogy analitikusan (valójában csak az kell nekünk, hogy a függvények formális hatványsorba fejthetők). (12.2)–(12.3) most így néz ki:

$$u(\xi + \omega, \lambda) = u + \gamma v - \omega + f(\xi + u, v, \lambda) \tag{12.4}$$

$$v(\xi + \omega, \lambda) = v + g(\xi + u, v, \lambda). \tag{12.5}$$

Tegyük fel tehát, hogy

$$f(x,y,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n f_n(x,y) \tag{12.6}$$

$$g(x,y,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varrho_n(x,y) \tag{12.7}$$

$$u(\xi) = u(\xi,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n(\xi)$$

$$v(\xi) = v(\xi,\lambda) = \gamma^{-1}\omega + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n v_n(\xi)$$

(12.4)–(12.5)-ből együttható összehasonlítással

$$u_n(\xi+\omega) - u_n(\xi) - \gamma v_n(\xi) = F_n(\xi) \tag{12.8}$$

$$v_n(\xi+\omega) - v_n(\xi) = G_n(\xi) \tag{12.9}$$

ahol $F_n(\xi)$ (és hasonlóan $G_n(\xi)$) λ^n együtthatója $f(\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n(\xi), \gamma^{-1}\omega + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n v_n(\xi), \lambda)$ (illetve $g(\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n(\xi), \gamma^{-1}\omega + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n v_n(\xi), \lambda))$ λ-hatványsorában. Mivel az (12.6)–(12.7) hatványsorokban a konstans tag 0, ezért

$$F_n(\xi) = f_n(\xi, \gamma^{-1}\omega) + \Phi_n\{f_\ell, u_\ell, v_\ell \colon \ell < n\}$$
$$G_n(\xi) = g_n(\xi, \gamma^{-1}\omega) + \Psi_n\{f_\ell, u_\ell, v_\ell \colon \ell < n\}.$$

Mint 11.1 Tételből tudjuk, (12.9) megoldhatóságának szükséges feltétele: $G_n^* = 0$. Ennek belátását későbbre halasztjuk. Mindenesetre, ha ez teljesül, akkor 11.1 Tétel alkalmazható, hacsak $F_n(\xi)$ és $G_n(\xi)$ analitikusak valamely sávban. A Fourier-együtthatókat (l. (11.2))$\widehat{\ }$-al jelölve, és az n indexek kiírását mellőzve (az (12.8)–(12.9) egyenletek alakja n-től független!), a megoldás Fourier-együtthatói a következők (v. ö. (11.4))

$$\widehat{v}_k = \frac{\widehat{G}_k}{e^{ik\omega}-1} \qquad (k \neq 0)$$

$$\widehat{u}_k = \frac{\widehat{F}_k}{e^{ik\omega}-1} + \frac{\gamma \widehat{G}_k}{(e^{ik\omega}-1)^2} \qquad (k \neq 0)$$

$$\widehat{v}_0 = -\frac{\widehat{F}_0}{\gamma}, \qquad \widehat{u}_0 \text{ tetszőleges.}$$

Tényleges bizonyításaink ezeken a formális eredményeken alapszanak. Bizonyítsuk azonban ezek feltételét; ez az egyetlen lépés, ahol használni fogjuk a metszetfeltételt.

12.1 Lemma. *$\forall n \geq 0$-ra* $\int_0^{2\pi} G_n(\xi)\ \mathrm{d}\xi = 0.$

Bizonyítás. Indirekt. Tekintsük azt a legkisebb n értéket, amelyre

$$m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi \neq 0$$

és g helyett a $(g - m\lambda)^n$ függvényt. Ekkor a (12.8)–(12.9) együttható-egyenletek megoldhatók nemcsak $(n-1)$-ig hanem n-ig, és véve az

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \sum_{\ell=1}^{n} \lambda^\ell u_\ell \\ \tilde{v} &= \gamma^{-1}\omega + \sum_{\ell=1}^{n} \lambda^\ell v_\ell\end{aligned}$$

függvényeket, a (12.4)–(12.5) alapegyenletek teljesülnek mod $0(\lambda^{n+1})$, azaz

$$\begin{aligned}\xi + \tilde{u} + \gamma\tilde{v} + f(\xi + \tilde{u}, \tilde{v}) &= \xi + \omega + \tilde{u}(\xi + \omega) + 0(\lambda^{n+1}) \\ \tilde{v} + g(\xi + \tilde{u}, \tilde{v}) &= \tilde{v}(\xi + \omega) + m\lambda^n + 0(\lambda^{n+1})\end{aligned}$$

(itt használjuk f és g véges sorfejtéseinek maradéktag-becsléseit). Mindez felfogható a következőképpen is: a $(\xi + \tilde{u}(\xi,\lambda), \tilde{u}(\xi,\lambda))$ görbe képe megegyezik az előbbi egyenletpár jobboldalával. Ha a kép metszi a görbét, akkor valamely ξ-re és $\xi' = \xi + \omega$-ra és $\lambda \to 0$-ra

$$\begin{aligned}\xi + \tilde{u}(\xi,\lambda) &= \xi' + \tilde{u}(\xi',\lambda) + 0(\lambda^{n+1}) \\ \tilde{v}(\xi,\lambda) &= \tilde{u}(\xi',\lambda) + m\lambda^n + 0(\lambda^{n+1}).\end{aligned}$$

Innen $\xi' = \xi + 0(\lambda^{n+1})$ adódik az első egyenletből, míg ugyanekkor a másodikból $m = 0$-t kapunk, ami ellentmondás. $\square$

13. fejezet

Feladatok

Megoldandók a $\times$-tel jelölt feladatok.

1. $^\times$ Legyen $(M, \mathcal{B}, T)$ endomorfizmus, ahol M topológikus tér, $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra, és T folytonos. A T endomorfizmust *topológikusan tranzitív*nak nevezzük, ha létezik sűrű orbit. T-t *minimális*nak nevezzük, ha nem létezik valódi, zárt, nem-üres, invariáns részhalmaza M-nek. *1. Igazoljuk, hogy a körvonal* $R_\alpha : S \to S$, $R_\alpha := x + \alpha \pmod 1$ *forgatása topologikusan tranzitív, sőt minimális, ha* $\alpha \notin \mathbb{Q}$. *2. Mutasson példát topológikusan tranzitív, de nem minimális leképezésre.*

2. $^\times$ (V. Arnold) Tekintsük az $1, 2, \ldots, 2^n, \ldots$ számsorozat tizes számrendszerben felírt alakjának első jegyeit. Előfordul ezek között a 7? A 8? Ha igen, melyik gyakoribb?

3. $^\times$ Mutassuk meg, hogy ha valamely n-re T^n ergodikus endomorfizmus, akkor T is az. Adjunk példát arra, hogy az állítás megfordítása nem igaz.

   Utalás: $\mu(T^{-n}A \circ A) \le \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j+1}A \circ T^{-j}A)$, ugyanis $\mathrm{d}(A, B) := \mu(A \circ B)$ metrikát definiál a mérhető részhalmazokon.

4. $^\times$ (Neumann ergodtétele operátorokra) Legyen U a H szeparábilis Hilbert tér izometriája, és P az ortogonális vetítés az invariáns vektorok $\mathcal{I} := \{f \in H \mid Uf = f\}$ alterére. Ekkor minden $f \in H$-ra teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i f = Pf.$$

5. $^\times$ Mutassuk meg, hogy 2^n, $n \in \mathbb{Z}^+$ az 1,2,...,9 jegyek tetszőleges véges hosszú sorozatával kezdődhet (az első jegy persze nem 0).

6. * (Simányi–Szász) Legyen $(M, \mathcal{F})$ mérhető tér, G csoport. Legyen adott minden $g \in G$-re egy $(M, \mathcal{F}, T_g)$ automorfizmus. Az $(M, \mathcal{F}, T_G) = \{(M, \mathcal{F}, T_g) \colon g \in G\}$ családot *csoport-hatásnak* nevezzük, ha $\forall g_1, g_2 \in G$-re $T_{g_1 g_2} = T_{g_2} T_{g_1}$ (a G csoport hat az M téren). Tetszőleges $x \in M$ esetén az x *G-pályájának* nevezük a $Gx := \{T_g x \colon g \in G\}$ halmazt.

   Legyen adott $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, és tekintsük $\mathbb{R}^d$-ben az α-ra ortogonális g vektorok $\mathbb{R}^{d-1}$-el izomorf additív G csoportját. Hasson $\mathbb{R}^d$-n a G csoport a következőképpen: $\forall g \in G, x \in \mathbb{R}^d$-re

$$T_g x = g + x.$$

   $\mathbb{R}^d$-t faktorizálva $\mathbb{Z}^d$ szerint végül is $\mathbb{T}^d$-n kapunk egy G-hatást.

   Bizonyítsuk be, hogy

   - *G-nek csak akkor van $\mathbb{T}^d$-ben sűrű pályája, ha az α koordinátái között van kettő lineárisan független (és akkor minden pálya sűrű);*
   - *Az előbbi feltétel mellett a pályák aszimptotikusan egyenletes eloszlásúak (mit is jelent ez?);*
   - ** *Legyen adott $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy van olyan véges F halmaza az α-knak, hogy ha $\alpha \notin F$, akkor $G = G_\alpha$ minden pályája metszi az U halmazt.*

7. $^{*\times}$ A csoport-hatás speciális esete a *csoport-eltolás.*

   Legyen M kompakt topológikus csoport és μ a Haar-mérték M-en. Tetszőleges rögzített $g \in G$-re legyen

$$T_g\ x = g \cdot x.$$

   Ekkor $(M, \mathcal{F}, T_g, \mu)$ automorfizmus. Ez a példa egyben általánosítása a tórusz feltekerésének (1.12 Példa).

   Mi T_g ergodicitásának feltétele, ha G Abel-csoport?

8. $^{*\times}$ A $\mathbb{T}^d$ tórusz $T_\alpha : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, $T_\alpha = x + \alpha \pmod 1$ eltolása akkor és csakis akkor minimális, ha $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ racionálisan függetlenek.

9. $^\times$ A $D : S \to S$, $Dx = 2x \pmod 1$ diadikus leképezés

   a) topológikusan tranzitív?

   b) minimális?

10. $^\times$ Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ sík $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixszal adott lineáris leképezését.

    Mutassuk meg, hogy A természetes módon származtatja a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tórusz T_A automorfizmusát (kissé pongyolán $T_A x = Ax (\operatorname{mod} \mathbb{Z}^2)$). Keressük meg ennek az invariáns mértékét!

11. $^{\times}$ Általánosítsuk az előző feladatban megjelenő szituációt magasabb dimenzióra is!

12. Tekintsük az $M = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ halmazon a

$$(Tx)_i = \begin{cases} 1 - x_i & \text{ha } \forall\, j < i\text{-re } x_j = 1 \\ x_i & \text{különben} \end{cases}$$

összeadó gépet. (itt $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) \in M$).

   a) Keressünk invariáns mértéket!
   b) Mi T^{-1} ?

13. $^{\times}$ $f\colon M \to M$ folytonos leképezése $M = \mathbb{T}^d$-nek. f akkor és csakis akkor topológikusan tranzitív, ha $\forall U\ V \subset M$ nyílt halmazra $\exists\, N = N(U,V)$ egész szám ($N \geq 1$), hogy $U \cap f^N V \neq \emptyset$. (Az állítás igaz lokálisan kompakt, szeparábibilis metrikus terekre is.)

14. $^{\times}$ Tekintsük az $I = [0,1]$ intervallum $Tx = 4x(1-x)$ endomorfizmusát. Mutassuk meg, hogy I-nek vannak pontjai, amelyek sem periódikus pontok, sem gyengén periódikus pontok.

15. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy az előző feladatban szereplő leképezésnek a $\varrho(x) = C \cdot (x(1-x))^{-\frac{1}{2}}$ függvény az invariáns sűrűsége. Mi C értéke?

16. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy a **14.** feladatban szereplő leképezés izomorf az

$$Tx = \begin{cases} 2x\,, & x < \dfrac{1}{2} \\[2ex] 1 - 2x\,, & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

sátor-tető leképezéssel?

17. $^{\times}$ Legyenek $x_1 < x_2 < \cdots < x_8$ a T^3 leképezés fixpontjai, ahol T a **14.** feladatban szereplő automorfizmus. Nyilván $x_1 = 0$.

   a) Mely i-re lesz $x_i = \dfrac{3}{4}$?
   b) Csoportosítsuk a maradék 6 pontot a T leképezés két 3 periódusú pályájába!

18. $^{\times}$ Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér.

   a) Mutassuk meg, hogy $\mathrm{d}\,(A,B) := \mu\,(A \circ B)$ pszeudo-metrika. ($A \circ B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$)
   b) Hogyan lehet $\mathrm{d}\,(A,B)$-t metrikává tenni?

c) Mutassuk meg, hogy

$$|\mu\,(X\cap Y)-\mu\,(U\cap V)\,|\leq\mu\,(X\circ U)+\mu\,(Y\circ V)\,.$$

19. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy a pék leképezése: $T\,:\,[0,1)^2\to[0,1)^2$

$$T(x,y)=\begin{cases}\left(2x,\dfrac{y}{2}\right), & 0<x<\dfrac{1}{2}\\ \left(2x-1,\dfrac{y+1}{2}\right), & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$$

ergodikus és keverő.

20. $^{*\times}$ (Rényi Alfréd) T akkor és csakis akkor keverő, ha $\forall\, A\in\mathcal{F}$-re

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(T^{-n}A\cap A\right)\to[\mu(A)]^2.$$

21. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy $[0,1)$ következő leképezései ergodikusak és keverőek is:

a) $Tx=\left\{2x+\dfrac{1}{2}\right\}$

b) $Tx=\begin{cases}2x, & x<\dfrac{1}{2}\\ 2(1-x), & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

22. Bizonyítsa be, hogy egy irredubicibilis Markov-eltolás ergodikus.

23. Bizonyítsuk be, hogy minden aperiodikus irredubicibilis Markov-eltolás keverő.

24. Milyen dinamikai rendszert definiál $[0,1]^2$-en az

$$\begin{pmatrix}1+\varepsilon & 1\\ \varepsilon & 1\end{pmatrix}$$

mátrix?

25. Bizonyítsuk be, hogy a

a) szorzat

b) ferde-szorzat

c) felemelés

leképezések endomorfizmusok.

26. Mutassuk meg, hogy az indukált leképezés automorfizmus.

27. Bizonyítsuk be, hogy a T_1 és T_2 keverő, akkor $T_1 \times T_2$ is az.

28. Ha T_1 és T_2 ergodikus, akkor $T_1 \times T_2$ akkor és csak akkor ergodikus, ha

$$\Lambda_d(T_1) \cap \Lambda_d(T_2) = \{1\}.$$

($\Lambda_d(T)$ jelöli a T által indukált operátor sajátértékeinek halmazát.)

29. $^\times$ Melyek a Gauss-leképezés fixpontjai?

30. *Jelölések, definíciók*

Legyen $(M, \mathcal{F}, \mu, T)$ endomorfizmus.

a. Tegyük fel, hogy $\mu(A) > 0$. Legyen $T_A : A \to A$ a következő: legyen $T_A x := T^k x$, ha $k \in \mathbb{N}$ a legkisebb érték, amelyre $T^k x \in A$. T_A-t *Poincaré-leképezés*nek (vagy első visszatérés leképezésnek, vagy derivált leképezésnek) nevezzük.

b. $f : M \to \mathbb{N}$ mérhető függvény. Jelölje

$$M_f = \{(x, k) \mid x \in M, \quad 1 \le k \le f(x)\} \subset M \times \mathbb{N}.$$

Legyen $\mathcal{F}_f$ az $A \times \{k\}$, $A \subset \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$ halmazok által generált σ-algebra és legyen $\mu_f(A \times \{k\}) = \mu(A)$. Legyen $T_f : M_f \to M_f$ a következő:

$$T_f(x, k) = \begin{cases} (x, k+1) & \text{ha} \quad k \le f(x) \\ (Tx, 1) & \text{ha} \quad k = f(x)\,. \end{cases}$$

Ekkor $(M_f, \mathcal{B}_f, \mu_f T_f)$ a *torony-endomorfizmus.* (Megjegyezzük, hogy μ_f csak akkor valószínűségi mérték, ha $\int_M f \, d\mu = 1$, de a definíció általában is értelmes, ha $f \in L_1(\mu)$.)

A. Mutassuk meg, hogy a Poincaré-leképzés és a torony-leképezés is mértéktartóak.

B. Ha T ergodikus, $\mu(A) > 0$ és $f \in L_1(\mu)$, akkor T_A és T_f is ergodikusak.

31. *Jelölések, definíciók:*

Legyen M topologikus tér, μ valószínűségi Borel-mérték

$$\operatorname{supp} \mu = \bigcap_{F \text{ zárt}, \ \mu(F)=1} F \qquad \text{(a } \mu \text{ mérték tartója)}$$

$$\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} \overline{\bigcup_{j \ge n} T^j x} \qquad \text{(az } x \text{ fázispont } \omega\text{-limeszpontjai)}$$

$$R(T) = \{x \in M \mid x \in \omega(x)\} \qquad (T \text{ visszatérő pontjai})$$

Legyen $(M, \mathcal{B}, \mu, T)$ endomorfizmus, ahol M szeparábilis metrikus tér, $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra, T folytonos. Igazoljuk:

A. M μ-majdnem mindenütt visszatérő, azaz supp $\mu \subset \overline{R(T)}$

B. Ha M kompakt és T ergodikus, akkor μ-majdnem mindenütt pont pályája sűrű supp μ-ben

32. $^\times$ Tekintsük a $[0,1)$ intervallum $Tx = \{2(1-x)\}$ leképezését.

a) Melyek T periódikus pontjai?

b) Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^{n-1}x)]$$

értékét, ha $f(x) = \sin(2\pi x)$. Milyen értelemben vehetjük a limeszt?

33. $^\times$ Ergodikus-e a $[0,1]$

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - 2x, & 0 < x < \dfrac{1}{4} \\ 2x - \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{5}{2} - 2x, & \dfrac{3}{4} < x < 1 \end{cases}$$

leképezése?

34. $^\times$ Keressük a $[0,1]$ intervallum

$$Tx \begin{cases} 3x, & 0 < x < \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{1}{3}\right), & \dfrac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

leképezésének invariáns mértékét.

35. $^\times$ Mikor ergodikus a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Z}^2$ 2-tórusz $T_\alpha(x,y) = (x+\alpha,\ y+x)$ leképezése?