

2. gyakorlat - Hatványsorok és Taylor-sorok

2022. február 27.

1. Adjuk meg az itt szereplő sorok konvergenciasugarát és konvergenciaintervallumát!

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$$

A konvergenciasugar meghatározáshoz a következő határértéket kell meghatározunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{n+2}} \rightarrow 1$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara 1. Az biztos, hogy a $(-1,1)$ nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$$

A fenti sor divergens, mivel nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele (az általános tag 0-hoz tartása).

$$x = -1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$$

Az előzőhöz hasonlóan ez a sor is divergens lesz, hisz itt sem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Tehát a konvergenciasugar 1, a konvergenciaintervallum: $(-1,1)$.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

A konvergenciasugar meghatározáshoz a következő határértéket kell meghatározunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow 0$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara ∞ , a konvergenciaintervallum: \mathbb{R} .

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

A konvergenciasugár meghatározáshoz a következő határértéket kell meghatározunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 + 1}} \rightarrow 1$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara 1. Az biztos, hogy a $(-1,1)$ nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

A fenti sor konvergens, ami majoránskritérium segítségével látható.

$$x = -1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

Ez a sor is konvergens lesz, hisz Leibniz típusú (az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz). Tehát a konvergenciasugár 1, a konvergenciaintervallum: $[-1,1]$.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2 + 3}}$$

A konvergenciasugár meghatározáshoz a következő határértéket kell meghatározunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n^2 + 3}}{\sqrt{(n+1)^2 + 3}} \rightarrow 1$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara 1. Az biztos, hogy a $(-1,1)$ nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3}}$$

A fenti sor divergens, ami minoránskritérium segítségével látható:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 3}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n^2}} = \frac{1}{2n}$$

$$x = -1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 3}}$$

Ez a sor is konvergens lesz, hisz Leibniz típusú (az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz). Tehát a konvergenciasugár 1, a konvergenciaintervallum: $[-1,1)$.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

A feladat megoldása előtt át kell alakítanunk a fent megadott sort ténylegesen hatványsor alakba.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}} \left(x - \frac{5}{4}\right)^{2n+1}$$

A konvergenciasugár meghatározáshoz a következő határértéket kell meghatározunk.

$$\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{\frac{4^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}} \rightarrow 4$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara $\frac{1}{4}$. Az biztos, hogy a $(1, \frac{3}{2})$ nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}},$$

ami konvergens.

$$x = \frac{3}{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}},$$

ami szintén konvergens. Tehát a konvergenciasugár $\frac{1}{4}$, a konvergenciaintervallum: $[1, \frac{3}{2}]$.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

A feladat megoldása előtt át kell alakítanunk a fent megadott sort ténylegesen hatványsor alakba.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

A konvergenciasugár meghatározáshoz a következő határértéket kell meghatározunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{n}}} \rightarrow 2$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara $\frac{1}{2}$. Az biztos, hogy a $(0, 1)$ nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

ami konvergens, hisz Leibniz típusú (az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz).

$$x = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ami divergens a p -szabály alapján. Tehát a konvergenciasugár $\frac{1}{2}$, a konvergenciaintervallum: $[0, 1)$.

2. Mely x -ek esetén konvergens az

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \dots$$

végtelen sor? Mi a sor összege? Melyik sort kapjuk tagonkénti deriválással? Mely x -ek esetén konvergens az új sor?

A fenti sort írjuk fel szumma alakban:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n$$

Ebből már egyszerűen megállapíthatjuk a konvergenciasugárt a következő határérték meghatározásával.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara 2. Az biztos, hogy a $(1,5)$ nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$$

A fenti sor divergens, hiszen nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

$$x = 5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Ez a sor is divergens lesz, hiszen itt sem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Tehát a konvergenciaintervallum: $(1,5)$.

A sor összegének meghatározásához a geometriai sor összegképletét használjuk.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n = \frac{2}{2x-1}$$

A tagonkénti deriválással kapott új sor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n n(x-3)^n$$

A konvergenciaintervallum meghatározásához itt is a következő határértéket kell megvizsgálnunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n \left(\frac{1}{2}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara 2. Az biztos, hogy a (1,5) nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} n$$

A fenti sor divergens, hiszen nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

$$x = 5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$$

Ez a sor is divergens lesz, hiszen itt sem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Tehát a konvergenciaintervallum itt is: (1,5).

3. Határozzuk meg az $f(x)$ által (a jelzett helyen) generált Taylor-sort!

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x + 4, & a &= 0 \\ f'(x) &= 3x^2 - 2 & f'(0) &= -2 \\ f''(x) &= 6x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 6 & f'''(0) &= 6 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \forall n \geq 4 \end{aligned}$$

Tehát a keresett Taylor polinom:

$$T(x) = 4 + \frac{-2}{1!}x + 0 + \frac{6}{3!}x^3 = x^3 - 2x + 4$$

Ebből azt a következtetés vonhatjuk le, hogy polinom Taylor-sora önmaga.

(b)

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad a = 1$$

Teljes indukcióval igazolható, hogy a fenti f függvény n -edik deriváltja a következő alakú:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n (n+1)!}{x^{n+2}} \\ f^{(n)}(1) &= (-1)^n (n+1)! \end{aligned}$$

Ennek segítségével már egyszerűen felírható a Taylor-sor.

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{n!} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (x-1)^n$$

(c)

$$f(x) = e^x, \quad a = 2$$

A fenti $f(x)$ függvény n -dik deriváltja:

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad f^{(n)}(2) = e^2$$

Ennek segítségével már egyszerűen felírható a Taylor sor.

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n$$

(d)

$$f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0$$

A fenti $f(x)$ függvény n -dik deriváltja:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Ennek segítségével már egyszerűen felírható a Taylor sor:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

(e)

$$f(x) = \arctan 2x, \quad a = 2$$

A fenti $f(x)$ függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$$

Ezen függvény Taylor sorát fel tudjuk írni egyszerűen, és ebből tagonkénti integrálással megkapjuk az $\arctan 2x$ függvény Taylor-sorát is.

$$f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n x^{2n}$$

Így már egyszerűen felírható a Taylor-sor:

$$T(x) = \int 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n x^{2n} dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n x^{2n+1}}{2n+1} + c$$

Az $x = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $c = 0$, azaz

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{(-4)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

4. Adjuk meg a függvények Taylor-sorát az $x=0$ helyen!

A feladat egyszerűen megoldható, hogy ha ismerjük a nevezetes függvények Taylor-sorát. Amennyiben nem emlékszünk rájuk, úgy a fenti feladatban leírt módszerrel dolgozzunk!

(a)

$$f(x) = xe^x$$

$$T(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

(b)

$$f(x) = x \cos \pi x$$

$$T(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x\pi)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

(c)

$$f(x) = x \cos^2 x$$

A megoldás során felhasználjuk a következő linearizáló formulát: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$T(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(d)

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

A feladat többféle módon is megoldható. Nyilván

$$\int \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{1}{1-x} + c = 1 + x + x^2 + \dots + c$$

Innen deriválva kapjuk, hogy

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

VAGY: A binomiális sor képletének felhasználásával, VAGY: az $\frac{1}{1-x}$ sor önmagával vett Cauchy-szorzataként. A binomiális sor alapján

$$T(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-1)^n x^n$$

5. Írjuk fel a megadott függvények binomiális sorának első négy tagját!

A feladat megoldása során a binomiális sor következő általános alakját használjuk:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

(a)

$$f(x) = (1 - x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$T_4(x) = \sum_{n=0}^4 \binom{-1/2}{n} (-x)^n = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$$

(b)

$$f(x) = (1 + x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$T_4(x) = \sum_{n=0}^4 \binom{-1/2}{n} x^{3n} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 + \frac{5}{16}x^9$$

(c)

$$f(x) = (1 - 2x)^3$$

$$T_4(x) = \sum_{n=0}^4 \binom{3}{n} (-2x)^n = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$$

6. Sorok segítségével számítsuk ki a határértékeket!

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{2n+1} = \frac{1}{3}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \dots}{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots)} = 2$$

7. Sorok segítségével adjunk 10^{-3} pontosságú becslést az alábbi határozott integrálokra!

Minden esetben a függvények 0 pont körüli Taylor-sorát használjuk közelítésként. Minden esetben elég a sor első három tagját tekintenünk, ugyanis akkor már a megadott pontosságú lesz a közelítésünk.

(a)

$$I = \int_0^{0.2} \sin x^2 dx$$

Az integrál utáni függvény Taylor polinomja:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$T_3(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!}$$

A Taylor-sor ismeretében most már közelíthetjük a fenti integrált.

$$I \approx \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} \right]_0^{0.2} = \frac{0.2^3}{3} - \frac{0.2^7}{42} + \frac{0.2^{11}}{11 \cdot 5!} \approx 0.003$$

(b)

$$I = \int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx$$

Az integrál utáni függvény Taylor polinomja:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$$

A Taylor-sor ismeretében most már közelíthetjük a fenti integrált.

$$I \approx \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \right]_0^{0.1} = 0.1 - \frac{0.1^3}{18} + \frac{0.1^5}{600} \approx 0.100$$

(c)

$$I = \int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4} dx$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^{4n}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8$$

A Taylor-sor ismeretében most már közelíthetjük a fenti integrált.

$$I \approx \left[1 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{72}x^9 \right]_0^{0.1} = 0.1 + \frac{1}{10}0.1^5 - \frac{1}{72}0.1^9 \approx 0.100$$