3. gyakorlat - Fourier-sorok

2022. március 18.

1. Keresse meg az alábbi 2π szerint periodikus f(x) függvények Fourier-sorát!

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha} \quad 0 \le x \le \pi \\ 0, & \text{ha} \quad \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos x \mathrm{d}x = \ldots = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos x \cos nx dx = \ldots =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad n = 1 \\ 0, & \quad \text{egyébként} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin nx = \ldots = \frac{1}{\pi} \frac{n(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1}$$

A fenti integrálok kétféle módon számolható ki. A trigonometrikus azonosságok segítségével egyszerűbb, könnyen integrálható alakra hozhatóak, vagy parciális integrálással számolhatóak. Az a_n-ra kapott formulából az is látható, hogy $b_n = 0 \forall$ páratlan n-re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{\cos x}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1} \sin nx =$$

$$= \frac{\cos x}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin 2kx$$

(b)

$$f(x) = |\sin x|$$

Az f(x) függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinusos tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \qquad \forall k = 0, 1, \ldots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \, \mathrm{d}x = \ldots = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin x| \cos nx = \ldots = \frac{2}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}$$

A fenti integrál kétféle módon számolható ki. A trigonometrikus azonosságok segítségével egyszerűbb, könnyen integrálható alakra hozható, vagy parciális integrálással számolható. Az a_n-ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0\forall$ páratlan n-re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\cos nx =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2}\cos 2kx$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi \end{cases}$$

Az f(x) függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinusos tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx = \ldots = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n \quad \text{páros} \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{ha} \quad n = 4k+1 \\ -\frac{2}{n\pi}, & \text{ha} \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

A fenti integrálok elemiek, így egyszerűen számolhatóak. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1}\cos(2l+1)x$$

(d)

$$f(x) = (\pi - |x|)^2, \text{ha} x \le \pi$$

Az f(x) függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinusos tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)^2 \mathrm{d}x = \ldots = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)^2 \cos nx = \ldots = \frac{4}{n^2}$$

A fenti integrálok elemiek, így egyszerűen számolhatóak. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos nx$$

(e)
$$f(x) = x^2, \text{ha } |x| \leq \pi$$

Az f(x) függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinusos tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \ldots = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx = \ldots = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

A fenti integrálok elemiek, így egyszerűen számolhatóak. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

(f)
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Mivel $f(x)$ páratlan, ezért

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - x) \sin nx \mathrm{d}x = \ldots = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n \quad \text{páros} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{ha} \quad n = 4k+1 \\ -\frac{4}{n\pi}, & \text{ha} \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$\frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{7} \sin 7x + - \ldots)$$

(g) Mennyivel egyenló a kövekező végtelen sor (korábbi két feladat segítségével)? (d) és (e) feladat Fourier-sorába $x = 0$-t helyettesítve a kerestt sor kifejezhet? és azt kapjuk, hogy:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

2. Keresse meg az alábbi T szerint periódikus f(x) függvények Fourier-sorát. (T=2 minden feladatban.)

(a)
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ha} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \int_0^1 x\cos\frac{2n\pi}{2}x\mathrm{d}x = \ldots = \frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \int_0^1 x\sin\frac{2n\pi}{2}x\mathrm{d}x = \ldots = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

A fenti integrálok parciális integrálással számolhatóak. Az a_n-ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0\forall$ páros n-re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}\cos n\pi x + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin n\pi x\right)$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{ha} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása: $f(x)$ páratlan tehát $b_n = 0$. Továbbá

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 2 - x\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{2}\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\cos\frac{2n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \ldots = 2\frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}$$

A fenti integrálok parciális integrálással számolhatóak. Az a_n-ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0\forall$ páros n-re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}\cos n\pi x = \frac{1}{2} - 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ha} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \int_0^1 \sin(\pi x)\cos\left(\frac{2n\pi}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin((n+1)\pi x) + \sin((1-n)\pi x)\,\mathrm{d}x$$

Itt a második tag $n = 1$ esetén azonosan 0, vagyis

$$a_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(2\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^1 = 0$$

Ha $n > 1$:

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos((1-n)\pi x)}{(1-n)\pi}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1-(-1)^{1-n}}{1-n}\right) = -\frac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)}$$

$$b_n = \int_0^1 \sin(\pi x)\sin\left(\frac{2n\pi}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos((n-1)\pi x) - \cos((n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x$$

Itt az első tag $n = 1$ esetén azonosan 1, vagyis:

$$b_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \cos(2\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Ha $n > 1$:

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-1)\pi x)}{(n-1)\pi}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+1)\pi x)}{(n+1)\pi}\right]_0^1 = 0 - 0 = 0$$

Az a_n-ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0\ \forall$ páratlan n-re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\pi x - \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+(-1)^n)}{n^2-1}\cos n\pi x =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{\sin\pi x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2k\pi x$$

3. Keresse meg az alábbi 2π szerint periódikus f(x) függvények Fourier-sorát a linearizáló formulák segítségével.
A feladat egyszerűen megoldható, hogy ha ismerjük a következő trigonometrikus azonosságokat:

$$\cos kx \cos lx - \sin kx \sin lx = \cos(k+l)x$$

$$\cos kx \cos lx + \sin kx \sin lx = \cos(k-l)x$$

$$\sin kx \cos lx + \cos kx \sin lx = \sin(k+l)x$$

$$\sin kx \cos lx - \cos kx \sin lx = \sin(k-l)x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

(a)

$$f(x) = \cos^2 x \sin x$$

$$F(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3x - \sin x}{2}\right) = \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin 3x$$

(b)

$$f(x) = \sin^2 x + \sin^3 x$$

$$F(x) = \frac{1-\cos 2x}{2} + \sin x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3x - \sin x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{4}\sin x - \frac{\sin 3x}{4}$$

(c)

$$f(x) = \sin 5x(\sin 6x + \cos 3x)$$

$$F(x) = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 11x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{2}$$

(d)

$$f(x) = \cos^2 x \sin^2 x$$

$$F(x) = \frac{1}{4}(2\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}$$