Matematika A2

7. gyakorlat megoldása

1. Keressük meg a megadott mátrix **(i)** sorainak egy bázisát, **(ii)** oszlopainak egy bázisát, **(iii)** és határozzuk meg a mátrix rangját!

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

   A feladat megoldásához Gauss-eliminációt végzünk. Ugynais ennek segítségével megadható az oszlopoknak, a soroknak egy bázisa és a mátrix rangja egyaránt. A Gauss-elimináció során csak a megengedett sorműveleteket végezzük.

   $$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   A második sor csupa 0-ból áll, így a sorok és oszlopok bázisa 1 dimenziós lesz, és a mátrix rangja is 1 lesz. (Rang= lineárisan független oszlopok száma= lineárisan független sorok száma= legnagyobb nem 0 aldetermináns mérete).
   A sorok bázisa: $(1, -3)$.
   Az oszlopok bázisa: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   A mátrix rangja: 1.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

   A feladat megoldásához Gauss-eliminációt végzünk. Ugynais ennek segítségével megadható az oszlopoknak, a soroknak egy bázisa és a mátrix rangja egyaránt. A Gauss-elimináció során csak a megengedett sorműveleteket végezzük.

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Mivel nincs a mátrixnak csupa 0 sora, így a sorok és oszlopok bázisa 3 dimenziós lesz, emellett a mátris rangja is 3.
   A sorok bázisa: $(1, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (2, 1, 3, 4)$.
   Az oszlopok bázisa: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   A mátrix rangja: 3.

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

   A feladat megoldásához Gauss-eliminációt végzünk. Ugynais ennek segítségével megadható az oszlopoknak, a soroknak egy bázisa és a mátrix rangja egyaránt. A Gauss-elimináció során csak a megengedett sorműveleteket végezzük.

   $$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott mátrixnak van 2 csupa 0 sora, így a sorok és oszlopok bázisa 3 dimeniós lesz, emellett a mátrix rangja is 3.
A sorok bázisa: $(1,-3,2,2,1),(0,3,6,0,-2),(2,-3,-2,4,4)$.
Az oszlopok bázisa: $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\\-3\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\6\\-2\\6\\10\end{pmatrix}$.
A mátrix rangja:3.

2. Keressünk egy olyan részhalmazát az alábbi vektoroknak, amely az öt vektor által kifeszített tér egy bázisát alkotja! Minden vektort írjuk fel a kapott bázis elemienek lineáris kombinációjaként! $\mathbf{v}_1=(1,2,0,3)$, $\mathbf{v}_2=(2,-5,-3,6)$, $\mathbf{v}_3=(0,1,3,0)$, $\mathbf{v}_4=(2,-1,4,-7)$, $\mathbf{v}_5=(5,-8,1,2)$.
Ezt a feladatot is az előzőhöz hasonlóan Gauss-eliminációval kell megoldanunk. És az így kapott alakból mér egyszerűen meg tudjuk majd adni a bázist.

$$\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\2&-5&1&-1&-8\\0&-3&3&4&1\\3&6&0&-7&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{3}{2}\\0&0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

Látható tehát, hogy ennek a mátrixnak 4 független sora van, azaz az öt vektor egy négydimenziós teret feszít ki és a v_1,v_2,v_3,v_4 vektor bázist alkot ebben a térben. A feladat alapján még ki kell fejeznünk v_5 vektort a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Az együtthatók leolvashatók az elminiáció végén kapott mátrix utolsó oszlopából:

$$v_5=0\cdot v_1+\frac{3}{2}v_2+\frac{1}{2}v_3+v_4.$$

Ebből látszódik, hogy v_2,v_3 és v_4 is kifejezhető a másik 4 vektor lineáris kombinációjaként, azaz $\{v_1,v_3,v_4,v_5\}$, $\{v_1,v_2,v_3,v_5\}$ és $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ szintén bázis. Viszont $\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$ nem bázis, hiszen ezek a vektorok lineárisan összefüggőek (ugyanis $\frac{3}{2}v_2+\frac{1}{2}v_3+v_4-v_5=\underline{0}$).

3. Keressünk egy csak sorvektorokból álló bázisát a sortérnek, és egy csak oszlopvektorkból álló bázisát az oszloptérnek.

(a) $\begin{bmatrix}1&-2&-4&3\\-3&6&12&-9\\1&0&1&3\end{bmatrix}$

Ezt a feladatot is az eddigiekhez hasonlóan Gauss-eliminációval oldjuk meg. Ugyanis ekkor meg tudjuk állapítani a sor illetve oszloptér dimenzióját, így meg tudjuk állapítani a bázist is.

$$\begin{bmatrix}1&-2&-4&3\\-3&6&12&-9\\1&0&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&-4&3\\0&0&0&0\\0&2&5&0\end{bmatrix}$$

Látható, hogy a mátrixnak a második sora csak 0-t tartalmaz, így a sorok és oszlopok terének dimenziója 2. Vagyis 2 elemű bázist kell kijelölni. A (sorcsere nélkül) kapott mátrixból leolvasható, hogy az első két oszlop, illetve az első és a harmadik sor függetlenek.
Sortér bázisa: $(1,-2,-4,3),(1,0,1,3)$.
Oszloptér bázisa: $\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix}2&-4&6&8\\2&-1&3&-5\\4&-5&9&3\\0&1&1&-2\end{bmatrix}$

Ezt a feladatot is az eddigiekhez hasonlóan (sorcsere nélküli) Gauss-eliminációval oldjuk meg. Ugyanis ekkor meg tudjuk állapítani a sor illetve oszloptér dimenzióját, így meg tudjuk állapítani a bázist is.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Látható tehát, hogy a mátrixnak van csupa 0 sora. Tehát a sorok és az oszlopok terének dimenziója 3. Így 3 elemű bázist kell kijelölni. Itt bármely olyan 3 három sor vagy oszlopvektor jó lesz, amelyek függetlenek. A vezéregyesek helye alapján az első kettő és a negyedik sor, valamint az els? 3 oszlop független. Ez alapján megállapíthatjuk a bázisokat.

Sortér bázisa: $(2, -4, 6, 8), (2, -1, 3, -5), (0, 1, 1 - 2)$

Oszloptér bázisa: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4. Az alább megadott információk alapján határozzuk meg, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van, és hogy a megoldásoknak hány paramétere van!

	A mérete	A rangja	$[A\|b]$ rangja
(a)	3×3	3	3
(b)	3×3	2	3
(c)	3×3	1	1
(d)	5×9	2	2
(e)	5×9	2	3
(f)	4×4	0	0
(g)	6×2	2	2

Egy tétel alapján tudjuk meghatározni a megoldások és így a paraméterek számát is.
(a) részben az eredeti mátrix rangja= kibővített mátrix rangja= ismeretlenek száma=3. Ebből azt állapíthatjuk meg, hogy az egyenletrendszer megoldása egyértelmű, azaz 1 megoldás létezik csupán és nincs szabad paraméter.
(b) részben az eredeti mátrix rangja $\neq$ kibővített mátrix rangja. Azaz ennek az egyenletrendszernek nem lesz megoldása, mivel a két rang egyenlősége a megoldhatóság szükséges feltétele.
(c) részben eredeti mátrix rangja= kibővített mátrix rangja $<$ ismeretlenek száma. Ebből azt állapíthatjuk meg, hogy ez egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van és a szabad paraméterek száma $3 - 1 = 2$.
(d) részben eredeti mátrix rangja= kibővített mátrix rangja $<$ ismeretlenek száma. Ebből azt állapíthatjuk meg, hogy ez egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van és a szabad paraméterek száma $9 - 2 = 7$
(e) részben részben az eredeti mátrix rangja $\neq$ kibővített mátrix rangja. Azaz ennek az egyenletrendszernek nem lesz megoldása, mivel a két rang egyenlősége a megoldhatóság szükséges feltétele.
(f) részben részben eredeti mátrix rangja= kibővített mátrix rangja $<$ ismeretlenek száma. Ebből azt állapíthatjuk meg, hogy ez egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van és a szabad paraméterek száma $4 - 0 = 4$. (Tetsz?leges 4 hosszúságú vektor megoldás, hiszen minden együttható 0.)
(g) részben az eredeti mátrix rangja= kibővített mátrix rangja= ismeretlenek száma=2. Ebből azt állapíthatjuk meg, hogy az egyenletrendszer megoldása egyértelmű, azaz 1 megoldás létezik csupán és nincs szabad paraméter.
Megjegyzés: az ismeretlenek száma= oszlopok száma.

5. Legyen $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ és $\mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$ a P_2 tér két vektora. Igazoljuk, hogy a $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ képlettel definiált művelet tényleg skaláris szorzat (belső szorzat) a P_2 téren!
Ahhoz, hogy ez tényleg skaláris szorzat, elenőriznünk kell a tulajdonságait.

(a) összegtartás: $\langle \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p_1}, \mathbf{q} \rangle + \langle \mathbf{p_2}, \mathbf{q} \rangle$

$$\langle \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}, \mathbf{q} \rangle = (a_0 + A_0)b_0 + (a_1 + A_1)b_1 + (a_2 + A_2)b_2 =$$

$$(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2) + (A_0b_0 + A_1b_1 + A_2b_2) = \langle \mathbf{p_1}, \mathbf{q} \rangle + \langle \mathbf{p_2}, \mathbf{q} \rangle$$

Tehát ez a tulajdonság rendben van.

(b) konstansszoros: $\langle \lambda\mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \lambda \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$

$$\langle \lambda\mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \lambda a_0b_0 + \lambda a_1b_1 + \lambda a_2b_2 = \lambda(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2) = \lambda\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

Tehát ez a tulajdonság is rendben van.

(c) szimmetrikusság: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 = b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$$

Ez is teljesül.

(d) pozitivitás: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \geq 0, \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{p} = 0$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \geq 0$$

A fenti egyenlőtlenség azért teljesül, mivel négyzetszámokat adunk össze, amik mindig nem negatívak, és csak akkor egyenlő a fenti összeg nullával, ha $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Azaz a nullpolinomról van szó, azaz $\mathbf{p} = 0$.

6. Legyen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Határozzuk meg, hogy a következők közül melyek skalár szorzatok az $\mathbb{R}^3$-on!
A feladat megoldásához ellenőriznünk kell a skaláris szorzat fenti tulajdonságainak teljesülését.

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$
Vegyük az $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ vektort. Ekkor $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, noha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Tehát ez nem skaláris szorzat.

(b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$
Ez sajnos nem lesz skaláris szorzat, mivel a linearitás nem teljesül rá. Ugyanis:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}, \mathbf{v} \rangle =&(u_1 + U_1)^2v_1^2 + (u_2 + U_2)^2v_2^2 + (u_3 + U_3)^2v_3^2 \neq \\ \neq&(u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2) + (U_1^2v_1^2 + U_2^2v_2^2 + U_3^2v_3^2)\end{aligned}$$

A fenti egyenlőség azért nem áll fent, mivel két tag négyzete három tagból áll, így nem egy kéttagú összeget kapnánk hanem háromtagút. Azaz nem teljeseül már a skaláris szorzat első tulajdonsága sem, így a fent deifiniált kifejezés NEM skaláris szorzat.

(c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$
Ez skaláris szorzat lesz, a fentiekhez hasonlóan vezethető le, és minden tulajdonság teljesül majd.

(d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$
Ez sajnos nem lesz skaláris szorzat. A 4. tulajdonság (a pozitivitás) nem teljesül rá minden esetben. Például $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ esetén $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1 - 4 + 1 = -2 < 0$. Tehát ez emiatt nem lesz skaláris szorzat.

7. Igazoljuk, hogy ha $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ euklideszi skalár szorzat $\mathbb{R}^n$-en és A pedig egy $n \times n$-es mátrix, akkor

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{Av} \rangle = \langle \mathbf{A^T u}, \mathbf{v} \rangle$$

Az euklideszi skalár szorzat definíciója alapján

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{Av} \rangle =& \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot (Av)_i = \sum_{i=1}^{n} \left[u_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}v_j \right) \right] = \\ =& \sum_{j=1}^{n} \left[v_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ji}^T u_i \right) \right] = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot (A^T u)_j = \langle \mathbf{A^T u}, \mathbf{v} \rangle\end{aligned}$$

8. A 2π szerint periodikus integrálható függvények terén tekintsük a következő műveletet:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,$$

ahol $\mathbf{f} = f(x)$, és $\mathbf{g} = g(x)$. Igazoljuk, hogy ez a művelet valóban skalár szorzás! Számítsuk ki az $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ értékét az alábbi függvények esetén!
Először is igazolnunk kell, hogy a fent definiált művelet valóban skaláris szorzás, azaz teljesül rá az a bizonyos 4 tulajdonság.
(i) összegtartás: $\langle \mathbf{f_1} + \mathbf{f_2}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f_1}, \mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{f_2}, \mathbf{g} \rangle$
Ez a tulajdonság teljesül az integrálás linearitása miatt. Ugyanis:

$$\langle \mathbf{f_1} + \mathbf{f_2}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} (f_1(x) + f_2(x))g(x)dx = \int_0^{2\pi} f_1(x)g(x)dx + \int_0^{2\pi} f_2(x)g(x)dx = \langle \mathbf{f_1}, \mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{f_2}, \mathbf{g} \rangle$$

(ii) skalárszorzás: $\langle \lambda\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \lambda\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$
Ez a tulajdonság is teljesül a konstans kiemelhetősége miatt. Ugyanis:

$$\langle \lambda\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} \lambda f(x)g(x)dx = \lambda \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \lambda\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$$

(iii) szimmetrikusság: $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$
Ez is teljesül, ugyanis:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \int_0^{2\pi} g(x)f(x)dx = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$$

(iv) pozitivitás: $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle \geq 0$
Ez is teljesül, mivel pozitív függvény integráljának értéke is pozitív. És csak akkor egyenlő 0-val, ha a 0 függvény integráljuk. De ez csak abban az esetben áll fenn, ha $f(x) = 0$.

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \int_0^{2\pi} f^2(x)dx \geq 0$$

A feladat következő részében csak ki kell számolni a megfelelő integrálokat.

(a) $\mathbf{f} = \cos x, \quad \mathbf{g} = \sin x$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} \cos x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2x = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

(b) $\mathbf{f} = \cos kx, \quad \mathbf{g} = \sin lx$, ahol k és l egész számok

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(l+k)x + \sin(l-k)x \mathrm{d}x = \ldots = 0$$

Az integrál meghatározásánál használtuk az ismert trigonometrikus azonosságot.

(c) $\mathbf{f} = \tan \frac{x}{8}, \quad \mathbf{g} = 1$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} \tan \frac{x}{8} \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \frac{x}{8}}{\cos \frac{x}{8}} = \left[-8 \ln \cos \frac{x}{8}\right]_0^{2\pi} = 4 \ln 2$$

9. Az 5. feladatban megadott skaláris szorzattal számítsuk ki $\|\mathbf{p}\|$-t!
Egy adott kifejezés normáját a skaláris szorzat segítségével a következő módon számoljuk ki: $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}$. Ezt használjuk a feladat megoldásában.

(a) $\mathbf{p} = -1 + 2x + x^2$

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

(b) $\mathbf{p} = 3 - 4x^2$

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

10. Legyen $\mathbf{u} = (3, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 7, -3)$, és $\mathbf{w} = (2, 0, 1, 1)$. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket! Itt is az előbb megismert képletet fogjuk használni, illetve azt amit a vektorokkal kapcsolatos műveletekről tudunk.

(a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, 2, 8, -1)$$
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 4 + 64 + 1} = \sqrt{73}$$

(b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{9 + 0 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 4 + 49 + 9} = \sqrt{63}$$
$$\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \sqrt{14} + \sqrt{63}$$

(c) $\| - 2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{v}\|$

$$\| - 2\mathbf{u}\| = \sqrt{36 + 0 + 4 + 16} = \sqrt{56}$$
$$\| - 2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{v}\| = \sqrt{56} + 2\sqrt{63} = 2(\sqrt{14} + \sqrt{63})$$

(d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$

$$3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w} = (16, -10, -31, 22)$$
$$\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{16^2 + (-10)^2 + (-31)^2 + 22^2}$$

11. Írjuk fel az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok közötti euklideszi távolságot! A feladat megoldása során a következőt használjuk. Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok közötti euklideszi távolság a következő módon számolható: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

(a) $\mathbf{u} = (2, -1)$; $\mathbf{v} = (3, 2)$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-1, -3)$$
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

(b) $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$; $\mathbf{v} = (2, 6, 0)$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-1, -5, -1)$$
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 25 + 1} = \sqrt{27}$$

(c) $\mathbf{u} = (2, 0, 1, 3)$; $\mathbf{v} = (-1, 4, 6, 6)$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (3, -4, -5, -3)$$
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{9 + 16 + 25 + 9} = \sqrt{59}$$

(d) $\mathbf{u} = (6, 0, 1, 3, 0)$; $\mathbf{v} = (-1, 4, 2, 8, 3)$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (7, -4, -1, -5, , -3)$$
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{49 + 16 + 1 + 25 + 9} = \sqrt{100} = 10$$

12. Igazoljuk az

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

egyenlőséget bármely $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorokra! Az egyenlőség igazolásánál csupán a norma és skaláris szorzat közötti kapcsolatot kell használni. Emellett a skaláris szorzat linearitását kell használni.

13. Határozzuk meg, hogy a megadott vektorok merőlegesek-e egymásra az euklideszi skaláris szorzat szerint!
Két vektor akkor merőleges egymásra, ha az euklidészi skaláris szorzatuk 0. Ezt kell tehát ellenőriznünk minden esetben.

   (a) $\mathbf{u} = (-1, 2, 4), \quad \mathbf{v} = (2, 3 - 1)$

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -2 + 6 - 4 = 0$$

   Tehát ez a két vektor merőleges egymásra.

   (b) $\mathbf{u} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (-1, -1, -1)$

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -1 - 1 - 1 = -3$$

   Tehát ez a két vektor nem merőleges egymásra.

   (c) $\mathbf{u} = (a, b, c), \quad \mathbf{v} = (0, 0, 0)$

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 + 0 + 0 = 0$$

   Minden a,b,c paraméter esetén merőleges lesz egymásra a két vektor.

   (d) $\mathbf{u} = (-2, 3, -5, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 1, -2, -9)$

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -4 + 3 + 10 - 9 = 0$$

   Tehát a két vektor merőleges egymásra.

   (e) $\mathbf{u} = (0, -1, 2, 5), \quad \mathbf{v} = (1, -2, 3, 0)$

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 + 2 + 6 + 0 = 8$$

   Tehát ez a két vektor nem merőleges egymásra.

   (f) $\mathbf{u} = (a, b), \quad \mathbf{v} = (-b, a)$

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -ab + ab = 0$$

   Tehát ez a két vektor is merőleges egymásra bármyel a,b paraméter esetén.

14. Tekintsük $\mathbb{R}^3$-on az euklideszi skalár szozatot. Milyen k értékek mellett merőleges egymásra $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$?
Ebben a feladatban is a fenti feltételt kell ellenőrizni. Azon k paramétereket keressük, amelyek esetén a két vektor euklidészi skaláris szorzata 0.

   (a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3), \quad \mathbf{v} = (1, 7, k)$

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2 + 7 + 3k = 0, \quad k = -3$$

   Tehát $k = -3$ esetén a két vektor merőleges egymásra.

   (b) $\mathbf{u} = (k, k, 1), \quad \mathbf{v} = (k, 5, 6)$

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k^2 + 5k + 6 = 0, \quad k_1 = -2, k_2 = -3$$

   Tehát $k_1 = -2$ és $k_2 = -3$ esetén lesz merőleges egymásra a két vektor.