

Matematika A2

8. feladatsor

1. Tekintsük az \mathbb{R}^n -et és rajta az euklideszi skalár szorzatot ($n = 2, 3, 4$). Határozzuk meg az \mathbf{u} és a \mathbf{v} vektorok által bezárt szög koszinuszát!

(a) $\mathbf{u} = (1, -3), \mathbf{v} = (2, 4)$

(d) $\mathbf{u} = (4, 1, 8), \mathbf{v} = (1, 0, -3)$

(b) $\mathbf{u} = (-1, 0), \mathbf{v} = (3, 8)$

(e) $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v} = (-3, -3, -3, -3)$

(c) $\mathbf{u} = (-1, 5, 2), \mathbf{v} = (2, 4, -9)$

(f) $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1), \mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$

2. Határozza meg az $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$ és a $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 0), \mathbf{c} = (1, 1, 0, 0), \mathbf{d} = (1, 0, 0, 0)$ vektorok között lévő szögeket a szokásos, euklideszi skalár szorzattal.

3. Legyen V egy skalárszorzos tér. Mutassuk meg, hogy ha \mathbf{u} és \mathbf{v} ortogonális vektorok V -ben úgy, hogy $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$, akkor $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$!

4. Legyen V egy skalárszorzos tér. Igazoljuk a

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

azonosságot V minden \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorára!

5. Tekintsük az \mathbb{R}^3 -at az euklideszi skalár szorzással. Az alábbiak közül melyek ortonormált vektorhalmazok?

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(c) $(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 0, 1)$

(d) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

6. Határozza meg az a, b, c valós számokat úgy, hogy a $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, a)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, -1, b, c)$ vektorok ortogonálisak legyenek!

7. Határozza meg az \mathbb{R}^3 -ben lévő $x + y + z = 0$ sík egy ortonormált bázisát!

8. Tekintsük az \mathbb{R}^3 -at az euklideszi skalár szorzással. Használjuk a Gram-Schmidt-módszert az $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ bázis ortonormált bázissá alakítására!

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (3, 7, -2), \mathbf{u}_3 = (0, 4, 1)$

9. Határozzuk meg \mathbf{v} $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ szerinti koordináta vektorát!

(a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3); \mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (2, 2, 0), \mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$

(b) $\mathbf{v} = (5, -12, 3); \mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6), \mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$

10. Tekintsük a $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ és a $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ bázisait \mathbb{R}^2 -nek, ahol

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- (a) Keressük meg a B' -ből B -be való bázisátmenet mátrixát!
- (b) Keressük meg a B -ből B' -be való bázisátmenet mátrixát!
- (c) Számítsuk ki a $[\mathbf{w}]_B$ koordinátavektort, ahol $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ és a $[\mathbf{w}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{w}]_B$ képlettel számítsuk ki $[\mathbf{w}]_{B'}$ -t is!
- (d) Számításunk ellenőrzésekén számítsuk ki direkt módon is a $[\mathbf{w}]_{B'}$ -t!
11. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok közül melyek ortogonálisak!
- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
12. Határozza meg az \mathbb{R}^2 természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát:
- (a) az $y = x$ egyenesre tükrözés (\underline{T}_1);
- (b) az $y = -x$ egyenesre tükrözés (\underline{T}_2);
- (c) az O -ra való tükrözés (\underline{T}_3).
- (d) Határozza meg a mátrixok segítségével a $P(3, 2)$ pont képeit!
- (e) Írja fel a $\underline{T}_2 \underline{T}_1$ mátrixot! Magyarázza meg a kapott eredmény és a \underline{T}_3 mátrix közötti kapcsolatot!
13. Határozza meg az \mathbb{R}^3 természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát:
- (a) az $y = x$ síkra tükrözés;
- (b) az x, y síkra vetítés;
- (c) a z tengely körüli 60° -os forgatás.
- (d) Határozza meg a mátrixok segítségével a $P(1, 1, 1)$ pont képeit!
14. (a) Határozza meg \mathbb{R}^2 -ben a $\frac{\pi}{2}$ -vel való forgatás mátrixát a $B = \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ természetes bázisban és a $B' = \left\{ \mathbf{b}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ bázisban!
- (b) Határozza meg a bázisátmenet mátrixot!
- (c) Hogyan kaphatjuk meg a B' -ben vett transzformáció mátrixot a B -ben vett transzformáció-mátrixból és a bázisátmenet mátrixból?