Matematika A2

8. feladatsor megoldása

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$-et és rajta az euklideszi skalár szorzatot ($n = 2, 3, 4$). Határozzuk meg az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektorok által bezárt szög koszinuszát!
   A bezárt szög koszinuszát az euklideszi skalárszorzat segítségével az alábbi képlettel kapjuk:
$$\cos\alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + \dots}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$
   (a) $\mathbf{u} = (1, -3)$, $\mathbf{v} = (2, 4)$
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{10}$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{20}$$
$$\cos\alpha = \frac{2-12}{\sqrt{200}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
   (b) $\mathbf{u} = (-1, 0)$, $\mathbf{v} = (3, 8)$
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1} = 1$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{73}$$
$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{73}}$$
   (c) $\mathbf{u} = (-1, 5, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 4, -9)$
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{30}$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{101}$$
$$\cos\alpha = \frac{-2+20-18}{\sqrt{3030}} = 0$$
   Azaz ez a két vektor merőleges egymásra.
   (d) $\mathbf{u} = (4, 1, 8)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{81} = 9$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$$
$$\cos\alpha = \frac{4+0-24}{9\sqrt{10}} = -\frac{20}{9\sqrt{10}}$$
   (e) $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (-3, -3, -3, -3)$
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{36} = 6$$
$$\cos\alpha = \frac{-3-0-3-0}{6\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
   (f) $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1)$, $\mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{55}$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{16} = 4$$
$$\cos\alpha = \frac{8+0+0+0}{4\sqrt{55}} = \frac{2}{\sqrt{55}}$$

2. Határozza meg az $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$ és a $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{d} = (1, 0, 0, 0)$ vektorok között lévő szögeket a szokászos, euklideszi skalár szorzattal.
A feladat megoldása során a fenti képletet használjuk majd.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{3}$$

$$\|\mathbf{c}\| = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos(a, b) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tehát az a és b vektorok által bezárt szög: $\frac{\pi}{6}$.

$$\cos(a, c) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tehát az a és c vektorok által bezárt szög: $\frac{\pi}{4}$.

$$\cos(a, d) = \frac{1}{2}$$

Tehát az a és d vektorok által bezárt szög: $\frac{\pi}{3}$.

$$\cos(b, c) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Tehát a b és c vektorok által bezárt szög: $\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

$$\cos(b, d) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tehát a b és d vektorok által bezárt szög: $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$\cos(c, d) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tehát a c és d vektorok által bezárt szög: $\frac{\pi}{4}$.

3. Legyen V egy skalárszorzatos tér. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ ortogonális vektorok V-ben úgy, hogy $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$, akkor $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$!

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}} = \sqrt{1 - 2 \cdot 0 + 1} = \sqrt{2}$$

4. Legyen V egy skalárszorzatos tér. Igazoljuk a

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

azonosságot V minden $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorára!
A feladat megoldása során a skaláris szorzat és a norma közötti kapcsolatot, illetve a skaláris szorzat linearitását kell használni.

5. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$-at az euklideszi skalár szorzással. Az alábbiak közül melyek ortonormált vektorhalmazok?
Egy vektorhalmaz akkor ortonormált, ha a benne lévő vektorok páronként merőlegesek egymásra és a hosszuk 1.

   (a) $a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $b = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $c = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
   A fenti vektorhalmaz nem lesz ortonormált, mert a b és c vektorok nem lesznek merőlegesek egymásra. Ugyanis
   $$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \neq 0$$
   Emiatt tehát nem alkothatnak ortnormált vektorrendszert.

   (b) $a = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $b = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $c = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
   A fenti vektorhalmaz ortonormált. A vektorok páronként merőlegesek és egységhosszúak.

   (c) $a = (1, 0, 0)$, $b = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $c = (0, 0, 1)$
   A fenti vektorhalmaz nem ortnormált, ugyanis a b és c vektorok nem merőlegesek egymásra:
   $$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

   (d) $a = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $b = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$
   A fenti vektorhalmaz ortonormált. Ugyanis a két vektor merőleges egymásra és a hosszuk 1.

6. Határozza meg az a, b, c valós számokat úgy, hogy a $\underline{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\underline{v}_2 = (1, 1, -1, a)$ és $\underline{v}_3 = (1, -1, b, c)$ vektorok ortogonálisak legyenek!
A vektorok akkor ortogonálisak, ha merőlegesek egymásra. Azaz azt kell ellenőriznünk, hogy a megfelelő euklideszi skaláris szorzatok 0-k legyenek.
$$\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle = 1 + 1 - 1 - a = 0, \rightarrow \quad a = -1$$
$$\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3} \rangle = b + c = 0$$
$$\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \rangle = -b - c = 0$$
A fenti egyenletekből azt látjuk, hogy a b és c paraméterek között a következő kapcsolat áll fenn: $b = -c$. Azaz a feladat megoldása: $a = -1$, míg $b = -c$, ahol b értéke szabadon megválasztható.

7. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$-ben lévő $x + y + z = 0$ sík egy ortonormált bázisát!
A sík egy kétdimenziós altér, így az ortnormált bázis két vektorból áll majd. Emellett annak is teljesülnie kell, hogy a két vekor merőleges egymásra, benne vannak a síkban illetve hosszuk 1.
A következő vektorpár ortonormált bázis: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$. (Ezek megkaphatók $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$ bázisból Gram-Schmidt-módszerrel.)

8. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$-at az euklideszi skalár szorzással. Használjuk a Gram-Schmidt-módszert az $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ bázis ortonormált bázissá alakítására!
A Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás során a következő lépéseket kell végrehajtani:
$$\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1}$$
$$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{u_2} \rangle \frac{\mathbf{v_1}}{\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle}$$
$$\mathbf{v_3} = \mathbf{u_3} - \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{u_3} \rangle \frac{\mathbf{v_1}}{\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle} - \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{u_3} \rangle \frac{\mathbf{v_2}}{\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} \rangle}$$
Ezek még nem lesznek ortonomált vektorok, tehát még le kell majd őket normálni.

(a) $\mathbf{u_1} = (1,1,1)$, $\mathbf{u_2} = (-1,1,0)$, $\mathbf{u_3} = (1,2,1)$

$$\mathbf{v_1} = (1,1,1),\ \mathbf{v_2} = (-1,1,0),\ \mathbf{v_3} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$$

Ezeket a vektorokat még le kell normálnunk. Tehát a végeredmény:

$$\mathbf{v_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \mathbf{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0),\ \mathbf{v_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

(b) $\mathbf{u_1} = (1,0,0)$, $\mathbf{u_2} = (3,7,-2)$, $\mathbf{u_3} = (0,4,1)$

$$\mathbf{v_1} = (1,0,0),\ \mathbf{v_2} = (0,7,-2),\ \mathbf{v_3} = \left(0, \frac{30}{53}, \frac{105}{53}\right)$$

Ezeket a vektorokat még le kell normálnunk. Tehát a végeredmény:

$$\mathbf{v_1} = (1,0,0),\ \mathbf{v_2} = \frac{1}{\sqrt{53}}(0,7,-2),\ \mathbf{v_3} = \frac{1}{\sqrt{53}}(0,2,7)$$

9. Határozzuk meg $\mathbf{v}$ $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ szerinti koordináta vektorát!

(a) $\mathbf{v} = (2,-1,3)$; $\quad \mathbf{v_1} = (1,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (2,2,0)$, $\mathbf{v_3} = (3,3,3)$
A koordinátavektor meghatározásához meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert: $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$. Ekkor $\mathbf{v}$ koordinátavektora: (a,b,c). Az egyenletrendszer egyszerűen megoldható az eredménye: $c = 1$, $b = -2$, $a = 3$.
Tehát $\mathbf{v}$ koordinátavektora: $(3,-2,1)$.

(b) $\mathbf{v} = (5,-12,3)$; $\quad \mathbf{v_1} = (1,2,3)$, $\mathbf{v_2} = (-4,5,6)$, $\mathbf{v_3} = (7,-8,9)$ A koordinátavektor meghatározásához meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert: $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$. Ekkor $\mathbf{v}$ koordinátavektora: (a,b,c). Az egyenletrendszer egyszerűen megoldható az eredménye: $c = 1$, $b = 0$, $a = -2$.
Tehát $\mathbf{v}$ koordinátavektora: $(-2,0,1)$.

10. Tekintsük a $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ és a $B' = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ bázisait $\mathbb{R}^2$-nek, ahol

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Keressük meg a B'-ből B-be való bázisátmenet mátrixát!
Ehhez fel kell írni B vektorait B' bázisban, azaz meg kell oldani az $\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \beta_1 \cdot \mathbf{v_2} = \mathbf{u_1}$ és $\alpha_2 \cdot \mathbf{v_1} + \beta_2 \cdot \mathbf{v_2} = \mathbf{u_2}$ rendszereket és így $P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) Keressük meg a B-ből B'-be való bázisátmenet mátrixát!
Mivel B a természetes bázis, ezért ez könnyen felírható:

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(Az (a) feladatot megoldhattunk volna úgy is, hogy előbb felírjuk $P_{B \to B'}$ mátrixot és ekkor $P_{B' \to B} = P^{-1}_{B \to B'}$.)

(c) Számítsuk ki a $[\mathbf{w}]_B$ koordinátavektort, ahol $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ és a $[\mathbf{w}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{w}]_B$ képlettel számítsuk ki $[\mathbf{w}]_{B'}$-t is!
$[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ és $[\mathbf{w}]_{B'} = P^{-1}_{B \to B'}[\mathbf{w}]_B = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}$.

(d) Számításunk ellenőrzésekén számítsuk ki direkt módon is a $[\mathbf{w}]_{B'}$-t!
Az $\alpha \cdot \mathbf{v_1} + \beta \cdot \mathbf{v_2} = \mathbf{w}$ rendszer megoldásából is $[\mathbf{w}]_{B'} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}$ adódik.

11. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok közül melyek ortogonálisak!
Definíció alapján egy mátrix akkor lesz ortogonális, ha $AA^T = I$

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$AA^T = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát ezen A mátrix ortogonális.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$BB^T = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tahát a B mátrix ortogonális.

(c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$CC^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Látható, hogy a C mátrix nem lesz ortogonális, hiszen az előbbi szorzás eredményeképp nem az identitás mátrixot kaptuk meg.

12. Határozza meg az $\mathbb{R}^2$ természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát:
A transzformáció mátrixának megadásához egyszerűen azt kell vizsgálnunk, ohgy a bázisvektoroknak mi lesz a képe, azaz a bázisvektorok mibe mennek át.

(a) az $y = x$ egyenesre tükrözés ($\underline{\underline{T}}_1$);
Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Az $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Tehát a keresett tarnszformációs mátrix: $T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) az $y = -x$ egyenesre tükrözés ($\underline{\underline{T}}_2$); Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Az $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Tehát a keresett tarnszformációs mátrix: $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) az O-ra való tükrözés ($\underline{\underline{T}}_3$). Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Az $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Tehát a keresett tarnszformációs mátrix: $T_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(d) Határozza meg a mátrixok segítségével a $P(3,2)$ pont képeit!

$T_1P = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $T_2P = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $T_3P = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(e) Írja fel a $\underline{\underline{T}}_2\underline{\underline{T}}_1$ mátrixot! Magyarázza meg a kapott eredmény és a $\underline{\underline{T}}_3$ mátrix közötti kapcsolatot!

Azt kapjuk, hogy $T_2T_1 = T_3$, hiszen a két tükrözést elvégezve pont az O-ra tükrözést kapjuk.

13. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát:

(a) az $y = x$ síkra tükrözés;

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) az x, y síkra vetítés;

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) a z tengely körüli 60°-os forgatás.

$$T_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Határozza meg a mátrixok segítségével a $P(1,1,1)$ pont képeit!

$T_1P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $T_2P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T_3P = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

14. (a) Határozza meg $\mathbb{R}^2$-ben a $\frac{\pi}{2}$-vel való forgatás mátrixát a $B = \left\{ \mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ természetes bázisban és a $B' = \left\{ \mathbf{b_1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b_2'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ bázisban!

$T_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $T_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(b) Határozza meg a bázisátmenet mátrixot!

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Hogyan kaphatjuk meg a B'-ben vett transzformáció mátrixot a B-ben vett transzformáció-mátrixból és a bázisátmenet mátrixból?

$$T_{B'} = P_{B \to B'}^{-1} T_B P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$