Matematika A2

10. feladatsor

1. Keressük meg azt az ortogonális koordináta transzformációt, amellyel az alábbi kvadratikus alak négyzetek összegévé transzfomálható és írjuk fel a kvadratikus alakot az új változók segítségével!

   (a) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$

   (b) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$

   (c) $2x_1x_2$

   (d) $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$

2. Nevezzük meg az alábbi felületeket és rajzoljuk fel a grafikonjukat!

   (a) $z = 19 - x^2 - y^2$

   (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (c) $x^2 - y^2 = z$

   (d) $x^2 + 4z^2 = 16$

   (e) $z^2 - y^2 = 1$

   (f) $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$

   (g) $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$

   (h) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

   (i) $(x^2/4) - y^2 - (z^2/4) = 1$

   (j) $y^2 - z^2 = 4$

3. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát, határozzuk meg az értékkészletét, adjuk meg a szintvonalakat, határozzuk meg az értelmezési tartomány határait, állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány nyílt, vagy zárt, vagy egyik sem, döntsük el, hogy az értelmezési tartomány korlátos vagy nem!

   (a) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

   (c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

4. Határozzuk meg a határértékeket!

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1}$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0);x\neq y} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

5. Az (x, y)-sík mely pontjaiban folytonosak az alábbi függvények?

   (a) $f(x, y) = \sin(x + y)$

   (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

6. Különböző görbék (ill. egyenesek) mentén vizsgálva, lássuk be, hogy az alábbi függvények határértéke nem létezik $(x, y) \to (0, 0)$ esetén!

   (a) $f(x, y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$

   (b) $f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$

   (c) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

7. Határozzuk meg a függvény parciális deriváltjait minden változója szerint!

   (a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (c) $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

   (d) $f(x, y) = \log_y x$

8. Határozzuk meg az összes másodrendű parciális deriváltat!

   (a) $f(x, y) = x^2y + \cos y + y \sin x$

   (b) $f(x, y) = \ln(x + y)$

9. Milyen sorrendű deriválással kapjuk meg könnyebben f_{xy}-t: először x-szerint vagy először y-szerint?

   (a) $f(x, y) = x \sin y + e^y$

   (b) $f(x, y) = x^2 + 5y + \sin x + 7e^x$

   (c) $f(x, y) = x \ln xy$

10. Igaz-e, hogy az $f(x, y)$ függvény egy megoldása a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

    Laplace-egyenletnek?

   (a) $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tartományon.

11. Adjuk meg a gradienst az adott pontban, azután vázoljuk fel a gradienst és azt a szintvonalat, amelyik az adott ponton átmegy!

   (a) $f(x, y) = y - x$, $P_0(2, 1)$

   (b) $f(x, y) = y - x^2$, $P_0(-1, 0)$

12. Adjuk meg a függvény iránymenti deriváltját a P_0 pontban, $\mathbf{A}$ irányában!

   (a) $f(x, y) = 2xy - 3y^2$, $P_0(2, 1)$, $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

   (b) $f(x, y, z) = xy + e^{x-y}$, $P_0(1, 1)$, $\mathbf{A} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

13. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben a függvény az adott P_0 pontban a leggyorsabban növekszik, ill. csökken!

   (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P_0(1, 1)$

   (b) $f(x, y) = x + y + xy$, $P_0(0, 0)$

14. Írja fel az érintősíkot a P_0 pontban!

   (a) $z = x^2 + y^2$, $P_0(1, 1, 2)$

   (b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $P_0(0, 0, 2)$

   (c) $z = xy + x + y$, $P_0(1, -1, -1)$