Matematika A2

10. feladatsor megoldása

1. Keressük meg azt az ortogonális koordináta transzformációt, amellyel az alábbi kvadratikus alak négyzetek összegévé transzformálható és írjuk fel a kvadratikus alakot az új változók segítségével!

   Először megkeressük a kvadratikus alakhoz tartozó A szimmetrikus mátrixot, mint a 9. feladatsor 10. feladatban. Kiszámoljuk ennek sajátértékeit (λ_1, λ_2) és sajátvektorait. A lenormált sajátvektorokból, mint oszlopokból előállítjuk a P koordináta transzformációt. Ekkor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   transzformáció esetén a kvadratikus alak $\lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2$ alakú lesz.

   (a) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$
   $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, sajátértékek: 3, 1, $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ és ezzel a koordináta transzformációval a kvadratikus alak: $3y_1^2 + y_2^2$.

   (b) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$
   $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, sajátértékek: 6, 1, $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ és ezzel a koordináta transzformációval a kvadratikus alak: $6y_1^2 + y_2^2$.

   (c) $2x_1x_2$
   $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sajátértékek: 1, -1, $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ és ezzel a koordináta transzformációval a kvadratikus alak: $y_1^2 - y_2^2$.

   (d) $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$
   $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, sajátértékek: $1 + \sqrt{17}$, $1 - \sqrt{17}$, $P = \frac{1}{\sqrt{34 - 8\sqrt{17}}} \begin{bmatrix} \sqrt{17} - 4 & 1 \\ 1 & 4 - \sqrt{17} \end{bmatrix}$ és ezzel a koordináta transzformációval a kvadratikus alak: $(1 + \sqrt{17})y_1^2 + (1 - \sqrt{17})y_2^2$.

2. Nevezzük meg az alábbi felületeket és rajzoljuk fel a grafikonjukat!

   (a) $z = 19 - x^2 - y^2$
   xz síkban rajzolt $z = 19 - x^2$ parabola megforgatásával kapott forgásparaboloid.

   (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
   xz síkban rajzolt $z = x$, $x \geq 0$ félegyenes megforgatásával kapott kúp.

   (c) $x^2 - y^2 = z$
   Hiperbolikus paraboloid vagy nyeregfelület.

   (d) $x^2 + 4z^2 = 16$
   Az xz síkban rajzolt $x^2 + 4z^2 = 16$ ellipszis y tengellyel párhuzamos eltolásával kapott felület.

   (e) $z^2 - y^2 = 1$
   Az yz síkban rajzolt $z^2 - y^2 = 1$ hiperbola x tengellyel párhuzamos eltolásával kapott felület.

   (f) $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$
   Ellipszoid, aminek x tengely mentén az átmérője 2, y és z tengely mentén pedig 6.

(g) $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$
Rögzített $y = k$-ra ($k \in \mathbb{R}$) a $4x^2 + 9z^2 = 9k^2$ ellipszis pontjai.

(h) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
Rögzített $z = k$-ra ($|k| \geq 1$) a $k^2 - 1 = x^2 + y^2$ kör pontjai.

(i) $(x^2/4) - y^2 - (z^2/4) = 1$
Rögzített $x = k$-ra ($|x| \geq 2$) a $\frac{k^2}{4} - 1 = y^2 + \frac{z^2}{4}$ ellipszis pontjai.

(j) $y^2 - z^2 = 4$
Az yz síkban rajzolt $y^2 - z^2 = 4$ hiperbola x tengellyel párhuzamos eltolásával kapott felület.

3. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát, határozzuk meg az értékkészletét, adjuk meg a szintvonalakat, határozzuk meg az értelmezési tartomány határait, állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány nyílt, vagy zárt, vagy egyik sem, döntsük el, hogy az értelmezési tartomány korlátos vagy nem!

(a) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$
A függvény értelmezési tartománya azon (x, y) pontpárokból áll, amelyekre $y - x \geq 0$. Azaz a függvény értelmezési tartománya: az $y = x$ egyenes és az efölötti terület. Ez zárt, nem korlátos.
Értékkészlete: nemnegatív valós számok.
Szintvonalai: $\sqrt{y - x} = c$, azaz $y = x + c^2$. Azaz a szintvonalai egyenesek, amik az y tengelyt a c^2 pontban metszik.

(b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
A függvény értelmezési tartománya azon (x, y) pontpárokból áll, amelyekre $9 - x^2 - y^2 \geq 0$. Azaz a függvény értelmezési tartománya: az origó középpontú három sugarú körlap pontjai. Ez zárt, korlátos.
Értékkészlete: $[0, 3]$.
Szintvonalai az $x^2 + y^2 = 9 - c^2$ körök ($c \in [0, 3]$).

(c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
A függvény értelmezési tartománya azon (x, y) pontpárokból áll, amelyekre $x^2 + y^2 > 0$. Azaz a függvény értelmezési tartománya: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. Ez nyílt, nem korlátos.
Értékkészlete: $\mathbb{R}$.
Szintvonalai $x^2 + y^2 = e^c$ körök.

4. Határozzuk meg a határértékeket!

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} = e^0 \cdot 1 = 1$$

A határérték kiszámításakor felhasználtuk, hogy a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1}$
A függvény a megadott pontban folytonos, így a határérték egyszerű behelyettesítéssel számolható. A fenti határérték: $\cos 0 = 1$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0);x\neq y} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0);x\neq y} \sqrt{x} + \sqrt{y} + 2 = 2$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

$$\lim_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4} = \lim_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{2x-y-4}{(2x-y-4)\cdot(\sqrt{2x-y}+2)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{1}{\sqrt{2x-y}+2} = \frac{1}{4}$$

A határérték kiszámoláskor gyöktelenítettük a számlálót, így már ki tudtuk számolni a határértéket.

5. Az (x, y)-sík mely pontjaiban folytonosak az alábbi függvények?

   (a) $f(x, y) = \sin(x + y)$
   A megadott függvény folytonos függvények összetétele, nincs olyan tartomány, ahol nem értelmezett. Azaz ez a függvény a teljes valós síkon folytonos.
   Folytonossági pontok: $\mathbb{R}^2$.

   (b) $f(x, y) = \ln(x^2+y^2)$ A megadott függvény folytonos függvények összetétele, a teljes valós síkon értelmezett, kivéve a $(0, 0)$ pontot. Azaz ezen függvény folytonossági pontjai: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

6. Különböző görbék (ill. egyenesek) mentén vizsgálva, lássuk be, hogy az alábbi függvények határértéke nem létezik $(x, y) \to (0, 0)$ esetén!

   (a) $f(x, y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$
   Közelítsünk a megadott pontba $y = mx^2$ parabolák mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + m^2x^4} = \frac{1}{1 + m^2}$$

   Azaz látható, hogy különböző m értékekre különböző határértéket kapunk. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

   (b) $f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$
   Közelítsünk a megadott pontba $y = mx$ különböző meredekségű egyenesek mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{|mx^2|} = \frac{m}{|m|}$$

   Azaz látható, hogy pozitív m értékekre a határérték $+1$, negatív m esetén viszont -1. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

   (c) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ Közelítsünk a megadott pontba $y = mx$ különböző meredekségű egyenesek mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{x + y} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1 - m)}{x(1 + m)} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

   Azaz látható, hogy különböző m értékekre különböző határértéket kapunk. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

7. Határozzuk meg a függvény parciális deriváltjait minden változója szerint!

   (a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

$$f'_x = 2x - y$$
$$f'_y = -x + 2y$$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

   (c) $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

$$f'_x = y \ln y e^{xy}$$
$$f'_y = \frac{e^{xy}}{y} + x \ln y e^{xy}$$

(d) $f(x,y) = \log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$

$$f'_x = \frac{1}{x \ln y}$$

$$f'_y = -\frac{\ln x}{y \ln^2 y}$$

8. Határozzuk meg az összes másodrendű parciális deriváltat!

   (a) $f(x,y) = x^2 y + \cos y + y \sin x$

   $$f'_x = 2xy + y \cos x$$
   $$f'_y = x^2 - \sin y + \sin x$$
   $$f''_{xx} = 2y - y \sin x$$
   $$f''_{xy} = f''_{yx} = 2x + \cos x$$
   $$f''_{yy} = -\cos y$$

   (b) $f(x,y) = \ln(x+y)$

   $$f'_x = f'_y = \frac{1}{x+y}$$
   $$f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

9. Milyen sorrendű deriválással kapjuk meg könnyebben f_{xy}-t: először x-szerint vagy először y-szerint?

   (a) $f(x,y) = x \sin y + e^y$
   Először x szerint kell deriválnunk, ugyanis ekkor csak az első tag marad meg, amit könnyű utána y szerint lederiválni.

   (b) $f(x,y) = x^2 + 5y + \sin x + 7e^x$
   Először y szerint kell deriválni, ugyanis ekkor csak a második tag marad. És azt utána könnyű x szerint deriválni.

   (c) $f(x,y) = x \ln xy$ Először y szerint deriválunk, majd x szerint.

10. Igaz-e, hogy az $f(x,y)$ függvény egy megoldása a

    $$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

    Laplace-egyenletnek?

    (a) $f(x,y) = e^{-2y} \cos 2x$

    $$f'_x = -2e^{-2y} \sin 2x$$
    $$f''_{xx} = -4e^{-2y} \cos 2x$$
    $$f'_y = -2e^{-2y} \cos 2x$$
    $$f''_{yy} = 4e^{-2y} \cos 2x$$

    Látható, hogy ezek alapján tényleg teljesül a fenti állítás. Azaz

    $$f''_{xx} + f''_{yy} = 0$$

(b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ a $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tartományon.

$$f'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f''_{xx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$f'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f''_{yy}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

Kisebb számolás után látható, hogy

$$f''_{xx}+f''_{yy}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

azaz itt nem teljesül a fenti egyenlet.

11. Adjuk meg a gradienst az adott pontban, azután vázoljuk fel a gradienst és azt a szintvonalat, amelyik az adott ponton átmegy!

(a) $f(x,y)=y-x$, $P_0(2,1)$

$$\mathrm{grad} f(x,y)=(f'_x,f'_y)=(-1,1)$$

Azaz ezen függvény gradiense minden pontban: $(-1,1)$

(b) $f(x,y)=y-x^2$, $P_0(-1,0)$

$$\mathrm{grad} f(x,y)=(f'_x,f'_y)=(-2x,1)$$

Azaz ezen függvény gradiense a megadott P_0 pontban: $(2,1)$.

12. Adjuk meg a függvény iránymenti deriváltját a P_0 pontban, $\mathbf{A}$ irányában!
A függvény iránymenti deriváltját a következő módon számoljuk: $\langle \mathrm{grad} f,\mathbf{v}\rangle$, ahol $\mathbf{v}=\frac{\mathbf{A}}{||\mathbf{A}||}$, azaz egy $\mathbf{A}$-val párhuzamos lenormált vektor.

(a) $f(x,y)=2xy-3y^2$, $P_0(2,1)$, $\mathbf{A}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

$$\mathrm{grad} f(x,y)=(2y,2x-6y),\quad \mathrm{grad} f(P_0)=(2,-2),\quad \mathbf{v}=\frac{1}{5}(4,3)$$

Azaz az iránymenti derivált értéke: $\frac{2}{5}$.

(b) $f(x,y,z)=xy+e^{x-y}$, $P_0(1,1)$, $\mathbf{A}=12\mathbf{i}-5\mathbf{j}$

$$\mathrm{grad} f(x,y)=(y+e^{x-y},x-e^{x-y}),\quad \mathrm{grad} f(P_0)=(2,0),\quad \mathbf{v}=\frac{1}{13}(12,-5)$$

Azaz az iránymenti derivált értéke: $\frac{24}{13}$.

13. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben a függvény az adott P_0 pontban a leggyorsabban növekszik, ill. csökken!

(a) $f(x,y)=x^2-y^2$, $P_0(1,1)$
Egy függvény egy adott pontban a gradiensének irányában nő leggyorsabban és azzal ellentétes irányban csökken a leggyorsabban. Most $\mathrm{grad} f(x,y)=(2x,2y)$, azaz $\mathrm{grad} f(P_0)=(2,2)$. Ezt lenormálva kapjuk a leggyorsabb növekedés irányát: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, a leggyorsabb csökkenésé pedig: $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

(b) $f(x, y) = x + y + xy$, $P_0(0, 0)$
Most $\operatorname{grad} f(x, y) = (1+y, 1+x)$, azaz $\operatorname{grad} f(P_0) = (1, 1)$. Ezt lenormálva kapjuk a leggyorsabb növekedés irányát: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, a leggyorsabb csökkenésé pedig: $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

14. Írja fel az érintősíkot a P_0 pontban!
Tudjuk, hogy a $z = f(x, y)$ függvény érintősíkja a P_0 pontban a következő: $f'_x(P_0)(x - x_0) + f'_y(P_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$. Azaz láthatjuk hogy csupán a parciális deriváltakra lesz szükség a feladat megoldásában.

(a) $z = x^2 + y^2$, $P_0(1, 1, 2)$
Az adott pont a síkban fekszik, így felírható az érintősík.

$$f'_x = 2x, \quad f'_x(P_0) = 2$$

$$f'_y = 2y, \quad f'_y(P_0) = 2$$

Az érintősík egyenlete: $2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0$.

(b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $P_0(0, 0, 2)$
Az adott pont a síkban fekszik, így felírható az érintősík.

$$f'_x = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad f'_x(P_0) = 0$$

$$f'_y = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad f'_y(P_0) = 0$$

Az érintősík egyenlete: $0(x - 1) + 0(y - 1) - (z - 2) = 0$.

(c) $z = xy + x + y$, $P_0(1, -1, -1)$
Az adott pont a síkban fekszik, így felírható az érintősík.

$$f'_x = y + 1, \quad f'_x(P_0) = 0$$

$$f'_y = x + 1, \quad f'_y(P_0) = 2$$

Az érintősík egyenlete: $0(x - 1) + 2(y + 1) - (z + 1) = 0$.