Matematika A2

11. feladatsor megoldása

1. Írja fel az érintősíkot a P_0 pontban!
   Tudjuk, hogy a $z = f(x,y)$ függvény érintősíkja a P_0 pontban a következő: $f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$. Azaz láthatjuk hogy csupán a parciális deriváltakra lesz szükség a feladat megoldásában.

   (a) $z = x^2 + y^2$, $P_0(1,1,2)$
   Az adott pont a síkban fekszik, így felírható az érintősík.

   $$f'_x = 2x, \quad f'_x(P_0) = 2$$
   $$f'_y = 2y, \quad f'_y(P_0) = 2$$

   Az érintősík egyenlete: $2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0$.

   (b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $P_0(0,0,2)$
   Az adott pont a síkban fekszik, így felírható az érintősík.

   $$f'_x = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad f'_x(P_0) = 0$$
   $$f'_y = -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad f'_y(P_0) = 0$$

   Az érintősík egyenlete: $0(x-1) + 0(y-1) - (z-2) = 0$.

   (c) $z = xy + x + y$, $P_0(1,-1,-1)$
   Az adott pont a síkban fekszik, így felírható az érintősík.

   $$f'_x = y + 1, \quad f'_x(P_0) = 0$$
   $$f'_y = x + 1, \quad f'_y(P_0) = 2$$

   Az érintősík egyenlete: $0(x-1) + 2(y+1) - (z+1) = 0$.

2. Határozzuk meg a megadott függvények összes lokális minimumát, maximumát, ezek helyét és a nyeregpontokat is!
   A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a parciális deriváltak eltűnjenek az adott pontban. Emellett a létezés elégséges feltétele, hogy az adott pontban a következő determináns értéke pozitív:

   $$D = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

   Ekkor, ha $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimumról, míg $f''_{xx} < 0$ esetben lokális maximumról beszélünk.

   (a) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$
   Először ellenőrizzük a szükséges feltétel teljesülését.

   $$f'_x = 4x + 3y - 5 = 0$$
   $$f'_y = 3x + 8y + 2 = 0$$

   A fenti egyenletrendszer megoldása: $x = 2$, $y = -1$. Ezen pontban lehet a függvénynek lokális szélsőértéke. Most vizsgáljuk a fenti determinánst.

   $$f''_{xx} = 4 \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 3 \quad f''_{yy} = 8$$

   Tehát a fenti determináns értéke a $(2,-1)$ pontban : $D = 32 - 9 = 23 > 0$. Azaz a $(2,-1)$ pont lokális minimum lesz, mivel $f''_{xx} > 0$.

(b) $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$
Először ellenőrizzük a szükséges feltétel teljesülését.

$$f'_x = 12x - 6x^2 + 6y = 0$$

$$f'_y = 6y + 6x = 0$$

A fenti egyenletrendszer megoldása: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ és $x_2 = 1$, $y_2 = -1$. Ezen pontokban lehet a függvénynek lokális szélsőértéke. Most vizsgáljuk a fenti determinánst.

$$f''_{xx} = 12 - 12x \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 6 \quad f''_{yy} = 6$$

A fenti determináns értéke a $(0,0)$ pontban: $D = 36$. Azaz a $(0,0)$ pontban a függvénynek lokális minimuma van, hisz $f''_{xx} > 0$.

A fenti determináns értéke az $(1,-1)$ pontban : $D = -36 < 0$. Azaz az $(1,-1)$ pont nyeregpont.

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$
Először ellenőrizzük a szükséges feltétel teljesülését.

$$f'_x = 3x^2 + 6x = 0$$

$$f'_y = 3y^2 - 6y = 0$$

A fenti egyenletrendszer megoldása: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 = 2$; $x_3 = -2$, $y_3 = 0$ és $x_4 = -2$,$y_4 = 2$. Ezen pontokban lehet a függvénynek lokális szélsőértéke. Most vizsgáljuk a fenti determinánst.

$$f''_{xx} = 6x + 6 \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 0 \quad f''_{yy} = 6y - 6$$

A fenti determináns értéke a $(0,0)$ pontban: $D = -36 < 0$. Azaz a $(0,0)$ pont nyeregpont. A fenti determináns értéke a $(0,2)$ pontban: $D = 36 > 0$. Azaz a $(0,2)$ pont lokális minimum lesz, mivel $f''_{xx} > 0$. A fenti determináns értéke a $(-2,0)$ pontban: $D = 36 > 0$. Azaz a $(-2,0)$ pont lokális maximum lesz, mivel $f''_{xx} < 0$. A fenti determináns értéke a $(-2,2)$ pontban: $D = -36 < 0$. Azaz a $(-2,2)$ pont nyeregpont.

(d) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$
Először ellenőrizzük a szükséges feltétel teljesülését.

$$f'_x = \frac{-2x}{(x^2+y^2-1)^2} = 0$$

$$f'_y = \frac{-2y}{(x^2+y^2-1)^2} = 0$$

A fenti egyenletrendszer megoldása: $x = 0$, $y = 0$. Ezen pontban lehet a függvénynek lokális szélsőértéke. Most vizsgáljuk a fenti determinánst. Értéke a $(0,0)$ pontban: $D = 4 - 0 = 4$. Azaz a $(0,0)$ pont lokális maximum lesz, mivel $f''_{xx} < 0$.

3. Keressük meg az $f(x,y) = x^2+y^2$ függvény abszolút maximumát és minimumát az első síknegyedbe eső háromszög alakú tartományon, amelyet az $x = 0$, $y = 0$ és $y + 2x = 2$ egyenesek határolnak!
Egy függvénynek abszolút szélsőértéke lehet azon belső pontokban, ahol a parciális deriváltak értéke 0; illetve a tartomány határán.
Először vizsgáljuk a belső pontokat:

$$f'_x = 2x = 0 \quad f'_y = 2y = 0$$

A fentiek alapján a $(0,0)$ pont számítana belső pontnak. De ez határpont, így ennek a függvénynek belső pontban nincs abszolút szélsőértéke.
Most következzék a határ vizsgálata:
(i) $x = 0$ esetben $f(0,y) = y^2$. Az így keletkezett egyváltozós függvény szélsőértékét vizsgálva azt kapjuk hogy $y = 0$. Azaz a $(0,0)$ pontban lehet abszolút szélsőérték.
(ii) $y = 0$ esetben $f(x,0) = x^2$. Az így keletkezett egyváltozós függvény szélsőértékét vizsgálva azt

kapjuk, hogy $x = 0$. Most nem kaptunk újabb potenciális pontot.
(iii) $y = -2x + 2$ esetben $f(x, -2x + 2) = 5x^2 - 8x + 4$. Az így keletkezett egyváltozós függvény szélsőértékét vizsgálva azt kapjuk, hogy $x = 0,8$, így $y = 0,4$. Azaz a $(0,8; 0,4)$ pontban lehet abszolút szélsőérték.
Emellett azt is tudjuk, hogy minden tartományi csúcspontban lehet abszolút szélsőérték, így vizsgálnunk kell még a $(1, 0)$ és $(0, 2)$ pontokat is.
A megkapott pontokat helyettesítsük vissza a függvénybe, hogy megkapjuk a minimumot és maximumot. $f(0, 0) = 0$, $f(0, 2) = 4$, $f(1, 0) = 1$, $f(0,8; 0,4) = 1$. Azaz a függvénynek a $(0, 0)$ pontban lesz minimuma, míg a $(0, 2)$ pontban maximuma.

4. Egy lapos körlap alakú tányér alakját $D = (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1$ egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely (x, y) pontjában a hőmérséklet értéke $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ lesz. Ábrázoljuk a hőmérséklet néhány szintgörbéjét D-ben. Keressük meg a tányér leghidegebb és legmelegebb pontjait!
Ebben a feladatban is a megadott függvény abszolút szélsőértékét kell megkeresnünk. Azaz először vizsgáljuk a lehetséges belső pontokat.

$$f'_x = 2x - 1 = 0 \quad f'_y = 4y = 0$$

A fentiek alapján a $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ belső pont egy lehetséges abszolút szélsőérték.
Most következik a határ vizsgálata:
Paraméterezzük be a határt polárkoordináták segítségével.

$$x = \cos\phi, \quad y = \sin\phi$$

Ekkor$f(\phi) = \cos^2\phi + 2\sin^2\phi - \cos\phi$. Az így keletkezett egyváltozós függvénynek keressük a szélsőértékét,ami a következő pontokban lehet: $\phi = -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; 0; \pi$. ezeket vissza kell helyettesíteni az x és y helyébe, hogy megkapjuk a keresett (x, y) pontpárokat. Ha ezek megvannak, akkor behelyettesítjük a kapott pontokat az eredeti függvénybe. A legnagyobb értéket $\Phi = \pm\frac{2}{3}\pi$ esetén kapjuk, így a legmelegebb pontok $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, míg a leghidegebb pont a az $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ belső pont.

5. Keressük meg az $f(x, y) = xy$ és a $g(x, y) = 2x^2 + y^2$ függvények maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ alakú félkörön!
Ez a feladat feltételes szélsőérték problémára vezet. Ezt Lagrange-multiplikátor segítségével oldható meg. (Másik megoldási módszer, hogy $y \geq 0$ miatt a feltételből ki tudjuk fejezni y-t: $y = \sqrt{4 - x^2}$, és így a feladat egy egyváltozós függvény szélsőérték keresésére egyszerűsíthet?.)
(i) A megoldáshoz szükségünk van az f és a feltétel függvény (ezt ϕ-vel jelölöm majd) gradiensére.

$$\text{grad} f = (y, x), \quad \text{grad}\phi = (2x, 2y)$$

Ekkor a következő egyenletrendszert kell megoldanunk: $\text{grad} f = \lambda\text{grad}\phi$, illetve $\phi(x, y) = 0$. Az egyenletrendszer megoldásaként 4 pontot kapunk: $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Ezen négy pontból a második és a negyedik nem teljesíti az $y \geq 0$ feltételt. Az első pont feltételes maximum, míg a harmadik feltételes minimum. Mivel az $y \geq 0$ feltételt nem vettük figyelembe a Lagrange-multiplikátornál, ezért a félkör két végpontját $((-2, 0), (2, 0))$ is le kell ellenőrizni, de ezek most nem adnak szélsőértéket.

(ii) A $g(x, y)$ függvény esetében eljárhatunk hasonlóan:

$$\text{grad} g = (4x, 2y), \quad \text{grad}\Phi = (2x, 2y)$$

Az egyenletrendszert megoldva a vizsgálandó pontok: $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$ és $(-2, 0)$. Ezek közül a második nem teljesíti az $y \geq 0$ feltételt. Az első pont feltételes maximum, a harmadik és negyedik pont pedig feltételes minimum.

6. Oldjuk meg a következő feladatot!
Ez a feladat is feltételes szélsőérték keresésére vezet, és ezt is Lagrange-multiplikátoros módszerrel oldjuk meg.

(a) Mennyi a minimuma $f(x, y) = x + y$-nak, ha $xy = 16$, $y > 0$?
A megoldáshoz szükségünk van az f és a feltétel függvény (ezt ϕ-vel jelölöm majd) gradiensére.

$$\mathrm{grad} f = (1, 1), \quad \mathrm{grad}\phi = (y, x)$$

Ekkor a következő egyenletrendszert kell megoldanunk: $\mathrm{grad} f = \lambda \mathrm{grad}\phi$, illetve $\phi(x, y) = 0$. Az egyenletrendszer megoldásaként 2 pontot kapunk: $(4, 4)$, $(-4, -4)$. A második pont esetén $y > 0$ nem teljesül, az els? pont adja a minimumot, aminek értéke 8.

(b) Mennyi a maximuma $f(x, y) = xy$-nak, ha $x + y = 16$?
A megoldáshoz szükségünk van az f és a feltétel függvény (ezt ϕ-vel jelölöm majd) gradiensére.

$$\mathrm{grad} f = (y, x), \quad \mathrm{grad}\phi = (1, 1)$$

Ekkor a következő egyenletrendszert kell megoldanunk: $\mathrm{grad} f = \lambda \mathrm{grad}\phi$, illetve $\phi(x, y) = 0$. Az egyenletrendszer megoldásaként 1 pontot kapunk: $(8, 8)$. Ez a pont feltételes maximum lesz, amelynek értéke 64.

7. Mekkorák a méretei a $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszisbe írható legnagyobb kerületű téglalapnak, ha az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel? Mekkora a területe?

   Ha (x, y) a téglalap első síknegyedbe eső csúcsa, akkor a $K(x, y) = 4(x + y)$ függvényt szeretnénk maximalizálni az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ feltétel mellett. Lagrange-multiplikátor módszert használva a a megoldás $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Így a kerület $4\sqrt{a^2 + b^2}$, a terület pedig $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$.