

Matematika A2

12. feladatsor

1. Vázzoljuk fel az integrálási tartományt és számítsuk ki az integrált!

(a) $\int_0^1 \int_0^1 x + y \, dx \, dy$

(e) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} \, dx \, dy$

(b) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-x-y} \, dx \, dy$

(f) $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^2 e^{xy} \, dx \, dy$

(c) $\int_0^{\pi} \int_0^x x \sin x \, dy \, dx$

(g) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^{1/\cos y} 3 \cos y \, dx \, dy$

(d) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y \, dy \, dx$

(h) $\int_0^3 \int_1^{4-2y} \frac{4-2y}{x^2} \, dx \, dy$

2. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + 2y$ függvény integrálját az $A(1, 1)$, $B(0, 3)$ és $C(3, 0)$ pontok által határolt háromszögön!
3. Határozza meg az $f(x, y) = \cos(4y) \cdot \sin^2(4y)$ függvény integrálját az $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(6, 2)$ és $D(4, 0)$ pontok által határolt paralelogrammán!
4. Vázzoljuk fel az integrálási tartományt, írjuk fel és számítsuk ki az integrált fordított integrálási sorrenddel!

(a) $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx$

(c) $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} \, dx \, dy$

(b) $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} \, dx \, dy$

(d) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} \, dy \, dx$

5. Határozzuk meg a térfogatát annak az éknek, amelyet a $z = 12 - 3y^2$ felület és az $x + y = 2$ sík vág ki az első tényolcadból!
6. Impropius kettős integrálok az egyváltozós impropius integrálokhoz hasonlóan értelmezhetőek, és hasonlóan is számíthatók. Először meghatározzuk az integrált véges tartományon, és megnézzük a határértéket, amint a határok a két változóra **egymástól függetlenül** végtelenbe tartanak. Számítsuk az integrálokat kétszeres integrálként, majd vizsgáljuk az egyváltozó szerinti végtelenben vett határértéket!

(a) $\int_1^{\infty} \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} \, dy \, dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} \, dx \, dy$

7. Vázzoljuk az adott görbékkel határolt tartományt, azután fejezzük ki a területét mint kétszeres integrált, majd számítsuk is ki a területet!
- (a) A koordinátatengelyek és az $x + y = 2$ egyenes.
(b) Az $x = -y^2$ parabola és az $y = x + 2$ egyenes.
(c) Az $x = y^2$ és $x = 2y - y^2$ parabolák.
8. Az ebben a feladatban szereplő integrálok, ill. ezek összegei, xy -síkbeli tartományok területét adják. Vázzoljuk fel a tartományokat, adjuk meg a határológörbéket és a metszéspontokat! Majd számítsuk ki az integrálokat!

$$(a) \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy dx \quad (b) \int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy dx + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} dy dx \quad (c) \int_0^2 \int_{x^2-4}^0 dy dx + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx$$

9. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény kettős integrálját T tartományon, ahol T az origó középpontú 4 sugarú kör azon pontjai, melyekre $x \leq y!$

10. Térjünk át polárkoordinátákra, és számítsuk ki az integrált!

$$(a) \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (c) \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) dx dy$$

$$(b) \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$$

11. Határozza meg a T tartományon az $f(x, y)$ függvény kettős integrálját, ha

$$(a) T = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}, f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$(b) T = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$(c) T = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}, f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$$

$$(d) T = \{(x, y) | (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}, f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$(e) T = \{(x, y) | \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}, f(x, y) = |2xy|$$

12. Áttérés polárkoordinátákra: Számítsuk ki az

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy$$

integrált!

13. Integrálja az $f(x, y) = 1$ függvényt az $y = x$, $y = 2x$, $xy = 1$ és $xy = 2$ görbék által határolt tartományon!

14. Legyen T egy tartomány az xy -sík első síknegyedében, amelyet az $xy = 1$, $xy = 9$ hiperbolák és az $y = x$, $y = 4x$ egyenesek határolnak. Használjuk az $x = u/v$, $y = uv$, $u > 0$, $v > 0$ transzformációt az

$$\iint_T \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx dy$$

integrál átírásához egy megfelelő G tartományra az uv -síkon! Számítsuk ki az integrált!

15. Határozza meg az $f(x, y) = x$ függvény integrálját a $T = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}$ tartományra!

16. Határozza meg az $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $xy = 1$ és $xy = 2$ görbék által határolt síkidom területét!

17. Határozza meg a $z = 1 - x^2 - 2y^2$ felület $z \geq 0$ része és az x, y sík által határolt térrész térfogatát!

18. Határozza meg az $f(x, y) = x + y$ felületnek az $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(2, 1)$ és $D(2, 0)$ pontok által határolt téglalap feletti részének felszínét!

19. Határozza meg az $f(x, y) = xy$, $T = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ felület felszínét!

20. Határozza meg az $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ felület xy sík feletti részének felszínét!

21. Határozza meg a $T = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$ tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit.

22. Határozza meg a $T = \{(x, y) | x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit.