# Matematika A2

## 12. feladatsor

1. Vázoljuk fel az integrálási tartományt és számítsuk ki az integrált!

(a) $\int_0^1 \int_0^1 x + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$

(b) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-x-y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(e - \frac{1}{e}\right)^2$

(c) $\int_0^\pi \int_0^x x \sin x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \pi^2 - 4$

(d) $\int_0^\pi \int_0^{\sin x} y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

(e) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 8\log 8 - 16 + e$

(f) $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^2 e^{xy} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = e - 2$

(g) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^{1/\cos y} 3\cos y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi$

(h) $\int_0^3 \int_1^{4-2y} \frac{4-2y}{x^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$

2. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + 2y$ függvény integrálját az $A(1, 1)$, $B(0, 3)$ és $C(3, 0)$ pontok által határolt háromszögön!

$$\int_0^1 \int_{-2x+3}^{-x+3} x^2 + 2y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \int_{-0.5x+1.5}^{-x+3} x^2 + 2y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{267}{4}$$

3. Határozza meg az $f(x, y) = \cos(4y) \cdot \sin^2(4y)$ függvény integrálját az $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(6, 2)$ és $D(4, 0)$ pontok által határolt paralelogrammán!

$$\int_0^2 \int_y^{y+4} \cos(4y) \cdot \sin^2(4y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cdots = \frac{\sin^3(8)}{3}$$

4. Vázoljuk fel az integrálási tartományt, írjuk fel és számítsuk ki az integrált fordított integrálási sorrenddel!

(a) $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2$

(b) $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{e}{2} - 1$

(c) $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2$

(d) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\log 17$

5. Határozzuk meg a térfogatát annak az éknek, amelyet a $z = 12 - 3y^2$ felület és az $x + y = 2$ sík vág ki az első térnyolcadból!

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} 12 - 3y^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \cdots = 20$$

6. Impropius kettős integrálok az egyváltozós impropius integrálokhoz hasonlóan értelmezhetők, és hasonlóan is számíthatók. Először meghatározzuk az integrált véges tartományon, és megnézzük a határértéket, amint a határok a két változóra **egymástól függetlenül** végtelenbe tartanak. Számítsuk az integrálokat kétszeres integrálként, majd vizsgáljuk az egyváltozó szerinti végtelenben vett határértéket!

(a) $\int\limits_{1}^{\infty}\int\limits_{e^{-x}}^{1} \frac{1}{x^3 y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1$

(b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$

7. Vázoljuk az adott görbékkel határolt tartományt, azután fejezzük ki a területét mint kétszeres integrált, majd számítsuk is ki a területet!

   (a) A koordinátatengelyek és az $x+y=2$ egyenes.

   $$\int\limits_0^2 \int\limits_0^{2-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \cdots = 2$$

   (b) Az $x=-y^2$ parabola és az $y=x+2$ egyenes.

   $$\int\limits_{-2}^{1} \int\limits_{y-2}^{y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cdots = 4,5$$

   (c) Az $x=y^2$ és $x=2y-y^2$ parabolák.

   $$\int\limits_0^1 \int\limits_{y^2}^{2y-y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cdots = \frac{1}{3}$$

8. Az ebben a feladatban szereplő integrálok, ill. ezek összegei, $xy$-síkbeli tartományok területét adják. Vázoljuk fel a tartományokat, adjuk meg a határológörbéket és a metszéspontokat! Majd számítsuk ki az integrálokat!

   (a) $\int\limits_0^{\pi/4}\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}-1$, a két görbe metszéspontja a $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pont.

   (b) $\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-2x}^{1-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-x/2}^{1-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1,5$. A tartomány egy háromszög, aminek a csúcsai (-1,2), (0,0), (2,-1).

   (c) $\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{x^2-4}^{0} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4}\int\limits_{0}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}$.

9. Határozza meg az $f(x,y)=x^2+y^2$ függvény kettős integrálját $T$ tartományon, ahol $T$ az origó középpontú 4 sugarú kör azon pontjai, melyekre $x \le y$!

   $$\iint\limits_T x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^4 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} r^3\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \cdots = 64\pi$$

10. Térjünk át polárkoordinátákra, és számítsuk ki az integrált!

    (a) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

    (b) $\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \pi(1-\log 2)$

    (c) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi(2\log 2-1)$

11. Határozza meg a $T$ tartományon az $f(x,y)$ függvény kettős integrálját, ha

    Mindegyik integrált polárkoordináták segítségével lehet számolni.

(a) $T=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1, y\geq 0, x\geq 0\}$, $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

(b) $T=\{(x,y)|1\leq x^2+y^2\leq 4\}$, $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi(8\log 2-3)$$

(c) $T=\{(x,y)|x^2+y^2\leq R^2\}$, $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

(d) $T=\{(x,y)|(x-3)^2+(y-2)^2\leq 1\}$, $f(x,y)=x^2+y^2$

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=13.5\pi$$

(e) $T=\{(x,y)|\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1\}$, $f(x,y)=|2xy|$

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6$$

12. Áttérés polárkoordinátákra: Számítsuk ki az

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$$

integrált!

13. Integrálja az $f(x,y)=1$ függvényt az $y=x$, $y=2x$, $xy=1$ és $xy=2$ görbék által határolt tartományon!

$$\int_0^1\int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\int_x^{2/x} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\cdots=\log 2.$$

14. Legyen $T$ egy tartomány az $xy$-sík első síknegyedében, amelyet az $xy=1$, $xy=9$ hiperbolák és az $y=x$, $y=4x$ egyenesek határolnak. Használjuk az $x=u/v$, $y=uv$, $u>0$, $v>0$ transzformációt az

$$\iint_T\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

integrál átírásához egy megfelelő $G$ tartományra az $uv$-síkon! Számítsuk ki az integrált!

A Jacobi-determináns $\frac{2u}{v}$ és így a helyettesítéses integrálás szabálya alapján

$$\iint_T\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^3\int_1^2(v+u)\cdot\frac{2u}{v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=\cdots=8+\frac{52}{3}\log 2$$

15. Határozza meg az $f(x,y)=x$ függvény integrálját a $T=\{(x,y)|x\geq 0, y\geq 0, x^{2/3}+y^{2/3}\leq 1\}$ tartományra!

$$\int_0^1\int_0^{\left(1-y^{2/3}\right)^{3/2}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\cdots=\frac{67}{120}.$$

16. Határozza meg az $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $xy = 1$ és $xy = 2$ görbék által határolt síkidom területét!

Használjuk az $x = \frac{v^2}{u^2}$, $y = u^2 v$ helyettesítést, azaz $u^3 = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $v^3 = xy$. Ekkor a Jacobi-determináns $6\frac{v^2}{u}$ és a terület

$$\iint_T 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt[3]{2}}\int_1^{\sqrt[3]{2}} 6\frac{v^2}{u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \cdots = \frac{2}{3}\log 2.$$

17. Határozza meg a $z = 1 - x^2 - 2y^2$ felület $z \geq 0$ része és az $x, y$ sík által határolt térrész térfogatát!

Az $f(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2$ függvényt kell kiintegrálni az origó középpontú egységkörön (hiszen a felület ezen tartomány felett van az $xy$ sík felett. A számolásnál polárkoordinátákat használunk $x = r\cos\varphi$, $y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi$:

$$\iint_T 1 - x^2 - 2y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{2\pi} \left(1 - r^2\right)\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \cdots = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

18. Határozza meg az $f(x,y) = x + y$ felületnek az $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(2,1)$ és $D(2,0)$ pontok által határolt téglalap feletti részének felszínét!

A felületet az $F = \iint_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ képlettel tudjuk számolni, vagyis

$$F = \int_0^1\int_0^2 \sqrt{3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3}.$$

19. Határozza meg az $f(x,y) = xy$, $T = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ felület felszínét!

A felületet az $F = \iint_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ képlettel tudjuk számolni, vagyis

$$F = \iint_T \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + r^2}\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}\left(2^{3/2} - 1\right).$$

20. Határozza meg az $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ felület $xy$ sík feletti részének felszínét!

A felületet az $F = \iint_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ képlettel tudjuk számolni, vagyis

$$F = \iint_T \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2}\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}\cdot 5^{3/2}.$$

21. Határozza meg a $T = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$ tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit.

A tömegközéppont $\left(\frac{m_x}{m}, \frac{m_y}{m}\right)$, ahol $m = \iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $m_x = \iint_T x\cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $m_y = \iint_T y\cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol $f(x,y)$ a test sűrűsége $(x,y)$ pontban.

Most homogén lemezünk van, vagyis $f(x,y) \equiv 1$. Polárkoordinátákat használva $m = \pi\frac{R^2}{2}$, $m_x = 0$, $m_y = \frac{2R^3}{3}$, így a tömegközéppont $\left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

22. Határozza meg a $T = \{(x,y) | x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit.

A tömegközéppont $\left(\frac{m_x}{m}, \frac{m_y}{m}\right)$, ahol $m = \iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $m_x = \iint_T x\cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $m_y = \iint_T y\cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol $f(x,y)$ a test sűrűsége $(x,y)$ pontban.

Most homogén lemezünk van, vagyis $f(x,y) \equiv 1$. Előbb $u = x^{1/3}$, $v = y^{1/3}$ helyettesítést, majd polárkoordinátákat használva $m = \frac{3\pi}{32}$, $m_x = m_y = \frac{8}{105}$, így a tömegközéppont $\left(\frac{256}{315\pi}, \frac{256}{315\pi}\right)$.