Matematika A2

13. feladatsor

1. Számítsuk ki a következő hármasintegrálokat!

   (a) $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1$

   (b) $\int\limits_0^{\sqrt{2}}\int\limits_0^{3y}\int\limits_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -54$

   (c) $\int\limits_1^e\int\limits_1^e\int\limits_1^e \frac{1}{xyz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 1$

   (d) $\int\limits_0^1\int\limits_0^{3-3x}\int\limits_0^{3-3x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1.5$

   (e) $\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} y\sin z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\pi^3}{2}\cdot(1-\cos 1)$

   (f) $\int\limits_{-1}^1\int\limits_{-1}^1\int\limits_{-1}^1 (x+y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = 0$

   (g) $\int\limits_0^3\int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}}\int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 18$

   (h) $\int\limits_0^2\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int\limits_0^{2x+y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{16}{3}$

   (i) $\int\limits_0^1\int\limits_0^{2-x}\int\limits_0^{2-x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{7}{6}$

   (j) $\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x^2}\int\limits_3^{4-x^2-y} x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$

   (k) $\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(u+v+w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = 0$

   (l) $\int\limits_1^e\int\limits_1^e\int\limits_1^e \ln r\ln s\ln t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s = -1$

   (m) $\int\limits_0^{\pi/4}\int\limits_0^{-\ln\cos v}\int\limits_{-\infty}^{2t} e^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$

   (n) $\int\limits_0^7\int\limits_0^2\int\limits_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\log 8$

2. Számítsuk ki az $f(x,y,z) = x+2y+xz^2$ függvény hármasintegrálját a D tartományon, ahol $D = \{(x,y,z) : 1\le x\le 3,\ 0\le y\le 2,\ -1\le z\le 2\}$ tartományon!

$$\int\limits_{-1}^{2}\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{1}^{3} x+2y+xz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \cdots = 72$$

3. Számítsuk ki $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$ függvény hármasintegrálját azon a téglatesten, aminek a csúcsai $(-1,2,0)$, $(-1,2,3)$, $(-1,4,0)$, $(-1,4,3)$, $(2,2,0)$, $(2,2,3)$, $(2,4,0)$, $(2,4,3)$!

$$\int\limits_{0}^{3}\int\limits_{2}^{4}\int\limits_{-1}^{2} e^{x+y+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \cdots = \left(e^2-e^{-1}\right)\cdot\left(e^4-e^2\right)\cdot\left(e^3-1\right)$$

4. Legyen $D = \{(x,y,z) : 0\le x\le 2,\ x\le y\le 4x+1,\ -x\le z\le xy\}$ és $f(x,y,z) = 2xz$. Számítsuk ki $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$-t!

$$\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{x}^{4x+1}\int\limits_{-x}^{xy} 2xz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{8264}{15}$$

5. Legyen a D tartomány a $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ és $(1,1,1)$ csúcsú tetraéder. Határozza meg az $f(x,y,z) = x+y+z$ függvény hármasintegrálját!

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y x+y+z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{4}$$

6. Határozza meg a $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 1\}$ tartományon az alábbi függvények hármasintegrálját:

   Hengerkoordinátás helyettesítést használunk: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Ekkor a Jacobi-determináns r és az integrálási tartományok: $r \in [0,2]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $z \in [0,1]$.

   (a) $f(x,y,z) = x^2$

   $$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3\cos^2\varphi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \cdots = 4\pi$$

   (b) $f(x,y,z) = \frac{z}{1+x^2+y^2}$

   $$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z}{1+r^2}\cdot r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \cdots = \frac{\pi}{2}\cdot\log 5$$

   (c) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2}$

   $$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \cdots = \pi(e^4-1)$$

   (d) $f(x,y,z) = \sqrt{1+x^2+y^2}$

   $$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\,r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \cdots = \frac{2\pi}{3}\left(5^{3/2}-1\right)$$

7. Határozza meg a $z = x^2+y^2$ és a $z = 4$ síkok közötti tartományon az $f(x,y,z) = z$ függvény hármasintegrálját!

   Hengerkoordinátákkal:

   $$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^4 zr\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \cdots = \frac{47\pi}{6}$$

8. Határozza meg a $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x,y,z > 0\}$ tartományon az alábbi függvények hármasintegrálját:

   Gömbkoordinátás helyettesítést használunk: $x = r\sin\alpha\cos\beta$, $y = r\sin\alpha\sin\beta$, $z = r\cos\alpha$. Ekkor a Jacobi-determináns $r^2\sin\alpha$ és az integrálási tartományok: $r \in [0,1]$, $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

   (a) $f(x,y,z) = xyz$

   $$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^3\sin^3\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}r = \cdots = \frac{1}{48}$$

   (b) $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$

   $$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}r = \cdots = \frac{\pi}{6}$$