Matematika A3 építőmérnököknek 2. gyakorlat
Elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

Általános alakja:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \tag{1}$$

ahol p, q ismert, folytonos függvények.

Az (1) egyenlet általános megoldását **konstans variációs módszer**rel tudjuk megtalálni. Ez 2 lépésből áll:

1. **Homogén** rész általános megoldása:

   $y' + p(x) \cdot y = 0$ átrendezés után ($y' = -p(x) \cdot y$) szétválasztható egyenletként megoldható. Legyen y_h ennek a homogén egyenletnek az általános megoldása.

2. **Inhomogén** egyenlet partikuláris megoldása:

   Ha a homogén rész általános megoldása $y_h = F(c, x)$, akkor az (1) egyenletnek egy y_p partikuláris megoldását megkaphatjuk $y_p = F(c(x), x)$ alakban. Ezt behelyettesítve (1) egyenletbe, megkapjuk $c'(x)$ függvényt. Innen $c(x)$ integrálással meghatározható, ebből pedig y_p is.

Ekkor az inhomogén egyenlet általános megoldása $y = y_h + y_p$.

1. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - y = \mathrm{e}^{-x} \tag{2}$$

2. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$xy' = \cos x - 2y \tag{3}$$

3. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$$

4. feladat Adja meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását:

$$y' - y = 2t\mathrm{e}^{2t},\ y(0) = 1$$

5. feladat Adja meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását $t > 0$ esetén:

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1,\ y(1) = 1/2$$

6. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - 2y = t^2\mathrm{e}^{2t}$$

7. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$\mathrm{e}^x\,(y' + y) = 1$$

8. feladat Adja meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását:

$$y' - \frac{2}{x}y = x,\ y(1) = 3$$

9. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - 3x^2y = 6x^2$$

10. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2+1},\ (x \neq 0)$$