

Matematika A3 építőmérnököknek 10. gyakorlat

Folytonos valószínűségi változók

Folytonos valószínűségi változók jellemzői

Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) dx$ minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmazra.

Tulajdonságai: $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Tulajdonságai: monoton nő, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, egy oldalról folytonos.

Megjegyzés: Ha egy X folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor tetszőleges $a < b$ konstansokra annak a valószínűsége, hogy X ezek közötti értéket vesz fel:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Folytonos valószínűségi változó **várható értéke:** $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$.

Szórásnégyzete: $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, ahol $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx$.

1. feladat Eloszlásfüggvények az alábbi függvények?

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F_1(x) &= \begin{cases} 1 + e^{1-x}, & \text{ha } x > -1 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} & \text{(b)} \quad F_2(x) &= \begin{cases} 2 - \frac{2}{x+1}, & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \\ \text{(c)} \quad F_3(x) &= \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \end{aligned}$$

2. feladat Sűrűségfüggvények az alábbi függvények?

$$\text{(a)} \quad f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \quad \text{(b)} \quad f_2(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

3. feladat Legyen X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = 2x$, ha $0 < x < 1$ és $f(x) = 0$ különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{D}^2(X)$ értékeket!

4. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0, 1)$, egyébként az értéke 0. Mennyi a c konstans értéke? Mi az X várható értéke?

5. feladat Milyen c érték esetén lesz az alábbi $f(x)$ függvény sűrűségfüggvény?

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^3), & \text{ha } 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

6. feladat Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \text{ha } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

7. feladat Egy gyárban kétféle alkatrészt gyártanak. Mindkettőnek ismert a működési idejének a sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Azt szeretném, ha legalább 6 év bírná az általam kiválasztott darab.

(a) Mennyi a valószínűségük, hogy 6 év után is még működőképesek lesznek?

(b) Mennyi a várható élettartamuk?

Nevezetes folytonos eloszlások

X eloszlása	jelölés	lehetséges értékek	$f(x)$	$F(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$
Egyenletes	$\text{UNI}(a, b)$	$x \in [a, b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Exponenciális	$\text{EXP}(\lambda)$	$x \geq 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

Az exponenciális eloszlás fontos tulajdonsága az **örökifjúság**: $\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

8. feladat Véletlenszerűen generálok három értéket az Excel segítségével a $(0, 1)$ intervallumon. Mennyi a valószínűsége, hogy az intervallumot három egyenlő részre osztva mindhárom részbe esik egy szám?

9. feladat Kirándulós keddet akarok tartani, ezért 7:00 és 8:00 között véletlenszerűen kitérve a pályaudvarra arra a vonatra szállok fel, amelyik a leghamarabb indul. A vonatok menetrendje a következő: A -ba 7:00-tól kezdve negyedóránként mennek vonatok, míg B -be 7:05-től kezdve negyedóránként indulnak vonatok. Máshova nem megy vonat a pályaudvarról.

- Mennyi a valószínűsége, hogy A -ba fogok utazni?
- Mennyi a valószínűsége, hogy A -ba fogok utazni, ha 7:05 és 8:05 között érkezek meg a pályaudvarra véletlenszerűen?

10. feladat Késő Kornél minden nap maximum 30 perc késéssel érkezik meg az egyetemre, viszont a késése egyenletes eloszlást követ a $(0, 30)$ intervallumon.

- Mennyi a valószínűsége, hogy 10 percnél többet fog ma késni?
- Mennyi a valószínűsége, hogy 25 percnél többet fog késni, ha tudjuk, hogy több, mint 15 percet fog késni?

11. feladat Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlást követ 3 év várható élettartammal.

- Mennyi a valószínűsége, hogy 5 évnél tovább fogom tudni használni?
- Mennyi a valószínűsége, hogy összesen 7 évnél tovább fogom tudni használni, feltéve, hogy már 2 éve használom?

12. feladat Egy telefonbeszélgetés hossza várhatóan 8 perc. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő hívásom 8 percnél tovább fog tartani?

13. feladat Egy ügyfélszolgálaton a panaszkezelések átlagos hossza 10 perc. Ha egy ügyféllel 20 percnél többet kell foglalkozni, akkor azt problémás esetnek tekintjük. Mennyi a valószínűsége, hogy egy héten 10 panaszkezelésből 3 lesz problémás?

14. feladat Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik? Hány óra garanciát vállaljanak, ha garanciális időn belül csak 5% garanciaigényt akarnak kielégíteni?

15. feladat Egy örökifjú tulajdonságú villanykörteknél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 100 ilyen égőt helyeztünk el. Mennyi a valószínűsége, hogy 1000 óra elteltével éppen 60 fog világítani?

16. feladat Egy valszám ZH megírásának az ideje órákban mérve exponenciális eloszlású valószínűségi változó, $\lambda = 3$ paraméterrel.

- Mennyi a valószínűsége, hogy a ZH írás 60 percnél tovább tart?
- Mennyi a valószínűsége, hogy 60 percnél tovább tart, feltéve, hogy már 30 perce írják?