Matematika A3 építőmérnököknek 10. gyakorlat
Folytonos valószínűségi változók

Folytonos valószínűségi változók jellemzői

Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x$ minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmazra.

Tulajdonságai: $f(x) \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Tulajdonságai: monoton nő, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, egy oldalról folytonos.

Megjegyzés: Ha egy X folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor tetszőleges $a < b$ konstansokra annak a valószínűsége, hogy X ezek közötti értéket vesz fel:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Folytonos valószínűségi változó **várható értéke**: $\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

Szórásnégyzete: $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, ahol $\mathbb{E}(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. feladat Eloszlásfüggvények az alábbi függvények?

(a) $F_1(x) = \begin{cases} 1 + \mathrm{e}^{1-x}, & \text{ha } x > -1 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$ (b) $F_2(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{x+1}, & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

(c) $F_3(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

Megoldásvázlat

(a) Nem, mert $x > -1$ esetén monoton csökken.

(b) Végtelenben 2-höz tart, így nem lehet eloszlásfüggvény.

(c) Ellenőrizhető, hogy F_3 monoton nő, folytonos, $\lim\limits_{x\to-\infty} F_3(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to+\infty} F_3(x) = 1$. Így F_3 egy eloszlásfüggvény.

2. feladat Sűrűségfüggvények az alábbi függvények?

(a) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$ (b) $f_2(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

Megoldásvázlat

(a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$, így ez nem sűrűségfüggvény.

(b) Ellenőrizhető, hogy f_2 nemnegatív és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,\mathrm{d}x = 1$, így ez egy sűrűségfüggvény.

3. feladat Legyen X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő: $f(x) = 2x$, ha $0 < x < 1$ és $f(x) = 0$ különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{D}^2(X)$ értékeket!

Megoldásvázlat A várható érték és a szórásnégyzet is integrálással számolható:

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} 2x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$
$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} 2x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{18}.$$

4. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0,1)$, egyébként az értéke 0. Mennyi a c konstans értéke? Mi az X várható értéke?

Megoldásvázlat A $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ egyenletből $c = 6$. (Ekkor $f(x) \geq 0$ is teljesül.)

Definíció alapján a várható érték: $\mathbb{E}(X) = \int\limits_{0}^{1} x \cdot 6x(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

5. feladat Milyen c érték esetén lesz az alábbi $f(x)$ függvény sűrűségfüggvény?

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^3), & \text{ha } 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Megoldásvázlat Vizsgáljuk meg a függvény nemnegativitását! A $2x - x^3$ gyökei 0, $-\sqrt{2}$ és $\sqrt{2}$. Ez viszont azt jelenti, hogy $2x - x^3$ pozitív a $(0, \sqrt{2})$ intervallumon, de negatív a $\left(\sqrt{2}, \frac{5}{2}\right)$ intervallumon. Így nem létezik olyan $c \neq 0$, amire $f(x)$ mindenhol nemnegatív lenne. (A $c = 0$ sem jó, hiszen ekkor $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.)

6. feladat Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

Megoldásvázlat Legyen X a kereslet és T a keresett tartályméret. Ekkor $\mathbb{P}(T < X) = 0.01$. Integrálással adódik, hogy $(1-T)^5 = 0.01$, amiből $T = 1 - \sqrt[5]{0.01} \approx 0.6$.

7. feladat Egy gyárban kétféle alkatrészt gyártanak. Mindkettőnek ismert a működési idejének a sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Azt szeretném, ha legalább 6 évig bírná az általam kiválasztott darab.

(a) Mennyi a valószínűségük, hogy 6 év után is még működőképesek lesznek?

(b) Mennyi a várható élettartamuk?

Megoldásvázlat Legyen X_1 és X_2 a két alkatrész működési ideje!

(a) A kérdezett valószínűségek integrálással számolhatók a sűrűségfüggvényből:

$$\mathbb{P}(X_1 > 6) = \int_6^\infty \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[-x^{-2}\right]_6^\infty = \frac{1}{36},$$

$$\mathbb{P}(X_2 > 6) = \int_6^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-x^{-1}\right]_6^\infty = \frac{1}{6}.$$

(b) A várható értékek:

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_1^\infty x \cdot \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[-2x^{-1}\right]_1^\infty = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{E}(X_2) = \int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^\infty = \infty.$$

Nevezetes folytonos eloszlások

X **eloszlása**	jelölés	lehetséges értékek	$f(x)$	$F(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
Egyenletes	$\mathrm{UNI}(a,b)$	$x \in [a,b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Exponenciális	$\mathrm{EXP}(\lambda)$	$x \geq 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

Az exponenciális eloszlás fontos tulajdonsága az **örökifjúság**: $\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

8. feladat Véletlenszerűen generálok három értéket az Excel segítségével a $(0,1)$ intervallumon. Mennyi a valószínűsége, hogy az intervallumot három egyenlő részre osztva mindhárom részbe esik egy szám?

Megoldásvázlat Legyen X_1, X_2, X_3 a három generált szám! Ekkor ezek függetlenek és mindegyik eloszlása $\mathrm{UNI}(0,1)$, azaz az eloszlásfüggvényük $F(x) = x$, ha $x \in [0,1]$ ($x < 0$ esetén $F(x) = 0$, $x > 1$ esetén pedig $F(x) = 1$). Így például annak a valószínűsége, hogy X_1 az intervallum első harmadába esik:

$$\mathbb{P}\left(X_1 < \frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Természetesen ugyanígy $\frac{1}{3}$ valószínűséggel esik X_2 és X_3 is az első harmadba. Hasonlóan látható, hogy a második vagy a harmadik intervallumba is $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ valószínűséggel esnek a változók.

Pontosan akkor fog mindhárom részbe esni egy szám, ha mindhárom részbe pontosan egy szám esik. Generáljuk egymás után a számokat! Ekkor X_1 biztosan az egyik harmadba esik. Ezután annak a valószínűsége, hogy X_2 egy másik harmadba esik, mint X_1, az $\frac{2}{3}$. Majd, ha ez teljesült, akkor annak a valószínűsége, hogy X_3 a harmadik (még üres) harmadba esik, az $\frac{1}{3}$. Így a kérdezett valószínűség $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

Megjegyzés:

- Igazából a feltételes valószínűségnél tanult szorzási szabályt használtuk.
- Akkor is $\frac{2}{9}$ lenne az eredmény, ha a $[0,1]$ intervallumot nem feltétlenül az $\frac{1}{3}$ és a $\frac{2}{3}$ pontoknál vágnánk szét, hanem tetszőlegesen felosztanánk három (nem feltételen összefüggő) egyenlő összhosszúságú részre. Legyen $A \subset [0,1]$ tetszőleges, nem feltétlenül összefüggő, összesen $\frac{1}{3}$ hosszú részhalmaza a $[0,1]$ intervallumnak! Használva, hogy a változók sűrűségfüggvénye konstans 1 a $[0,1]$-en: $\mathbb{P}(X_1 \in A) = \int_A 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, és innen a fentihez hasonlóan számolható a kérdezett valószínűség.

9. feladat Kirándulós keddet akarok tartani, ezért 7:00 és 8:00 között véletlenszerűen kiérkezve a pályaudvarra arra a vonatra szállok fel, amelyik a leghamarabb indul. A vonatok menetrendje a következő: A-ba 7:00-tól kezdve negyedóránként mennek vonatok, míg B-be 7:05-től kezdve negyedóránként indulnak vonatok. Máshova nem megy vonat a pályaudvarról.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy A-ba fogok utazni?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy A-ba fogok utazni, ha 7:05 és 8:05 között érkezek meg a pályaudvarra véletlenszerűen?

Megoldásvázlat

(a) Az egy óra alatt 40 olyan perc van, amikor a következő vonat A-ba megy és 20 olyan, amikor B-be. Így $\frac{2}{3}$ valószínűséggel megyek A-ba.

(b) Ugyanúgy $\frac{2}{3}$.

10. feladat Késő Kornél minden nap maximum 30 perc késéssel érkezik meg az egyetemre, viszont a késése egyenletes eloszlást követ a $(0, 30)$ intervallumon.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy 10 percnél többet fog ma késni?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy 25 percnél többet fog késni, ha tudjuk, hogy több, mint 15 percet fog késni?

Megoldásvázlat Legyen T Kornél késése percekben számolva. Ekkor $T \sim \mathrm{UNI}(0, 30)$.

(a) $\mathbb{P}(T > 10) = \frac{2}{3}$

(b) $\mathbb{P}(T > 25 \,|\, T > 15) = \frac{1}{3}$

11. feladat Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlást követ 3 év várható élettartammal.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy 5 évnél tovább fogom tudni használni?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen 7 évnél tovább fogom tudni használni, feltéve, hogy már 2 éve használom?

Megoldásvázlat Legyen X a körte élettartama! Tudjuk, hogy exponenciális eloszlás várható értéke a paraméter reciproka, így években számolva $X \sim \mathrm{EXP}\left(\frac{1}{3}\right)$.

(a) Legyen F az X eloszlásfüggvénye. Ekkor

$$\mathbb{P}(X > 5) = 1 - F(5) = \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}.$$

(b) Az örökifjú tulajdonságot használva:

$$\mathbb{P}(X > 7 \,|\, x > 2) = \mathbb{P}(X > 5) = \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}.$$

12. feladat Egy telefonbeszélgetés hossza várhatóan 8 perc. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő hívásom 8 percnél tovább fog tartani?

Megoldásvázlat Feltehető, hogy egy telefonbeszélgetés hossza exponenciális eloszlást követ. Ekkor a várható értékből tudjuk, hogy $X \sim \mathrm{EXP}\left(\frac{1}{8}\right)$, ahol X egy telefonbeszélgetés hosszát jelöli percekben számolva. Legyen F az eloszlásfüggvénye! Ekkor

$$\mathbb{P}(X > 8) = 1 - F(8) = \mathrm{e}^{-1}.$$

Megjegyzés: Tetszőleges exponenciális eloszlású változóra igaz, hogy e^{-1} valószínűséggel nagyobb a várható értékénél.

13. feladat Egy ügyfélszolgálaton a panaszkezelések átlagos hossza 10 perc. Ha egy ügyféllel 20 percnél többet kell foglalkozni, akkor azt problémás esetnek tekintjük. Mennyi a valószínűsége, hogy egy héten 10 panaszkezelésből 3 lesz problémás?

Megoldásvázlat Feltehető, hogy egy panaszkezelés hossza exponenciális eloszlást követ. Ekkor a várható értékből tudjuk, hogy $X \sim \mathrm{EXP}\left(\frac{1}{10}\right)$, ahol X egy panaszkezelés hosszát jelöli percekben számolva. Legyen F az eloszlásfüggvénye! Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy panaszkezelés problémás:

$$\mathbb{P}(X > 20) = 1 - F(20) = \mathrm{e}^{-2}.$$

Ekkor 10 panaszkezelésből a problémásak számának eloszlása $\mathrm{BIN}\left(10, \mathrm{e}^{-2}\right)$. Így annak a valószínűsége, hogy pontosan 3 problémás van a 10-ből: $\binom{10}{3} \cdot \mathrm{e}^{-6} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-2})^7$.

14. feladat Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik? Hány óra garanciát vállaljanak, ha garanciális időn belül csak 5% garanciaigényt akarnak kielégíteni?

Megoldásvázlat Legyen X egy berendezés működési ideje. Ekkor $\mathbb{P}(X < 1000) = 0.02$, amiből az eloszlás paramétere $\lambda = \frac{-\ln 0.98}{1000} \approx 2.02 \cdot 10^{-5}$. A várható működési idő $\frac{1}{\lambda}$. Annak a valószínűsége, hogy ennél tovább működik egy berendezés: $\mathbb{P}(X > \frac{1}{\lambda}) = e^{-1}$.

Ha T a vállalt garanciaidő, akkor az kell, hogy $\mathbb{P}(X < T) = 0.05$, ahonnan $T = -\frac{\ln 0.95}{\lambda} \approx 2538$ óra.

15. feladat Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\dfrac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 100 ilyen égőt helyeztünk el. Mennyi a valószínűsége, hogy 1000 óra elteltével éppen 60 fog világítani?

Megoldásvázlat Legyen X egy ilyen körte működésének az ideje. Ekkor X exponenciális eloszlású és a $\mathbb{P}(X > 2000) = \frac{2}{3}$ egyenletből $\mathrm{e}^{-2000\lambda} = \frac{2}{3}$, azaz $\lambda = -\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2000}$. Innen

$$\mathbb{P}(X > 1000) = \mathrm{e}^{-1000\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Így a 100 égőből 1000 óra után is működők számának eloszlása $\mathrm{BIN}\left(100, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Tehát annak a valószínűsége, hogy pontosan 60 működik közülük: $\binom{100}{60} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{30} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{40}$.

16. feladat Egy valszám ZH megírásának az ideje órákban mérve exponenciális eloszlású valószínűségi változó, $\lambda = 3$ paraméterrel.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a ZH írás 60 percnél tovább tart?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy 60 percnél tovább tart, feltéve, hogy már 30 perce írják?

Megoldásvázlat Legyen X a ZH megírásának az ideje!

(a) Órában számolva: $\mathbb{P}(X > 1) = \mathrm{e}^{-3}$.

(b) Örökifjúság alapján: $\mathbb{P}\left(X > 1 \,|\, X > \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.