Matematika A3 építőmérnököknek 1. gyakorlat
Szétválasztható és elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Szétválasztható differenciálegyenletek

Szétválasztható differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{1}$$

ahol $g(y) \neq 0$. Ekkor az egyenlet általános megoldását a

$$\int \frac{1}{g(y)} \, \mathrm{d}y = \int f(x) \, \mathrm{d}x$$

egyenlet megoldásából kaphatjuk meg.

1. feladat Oldjuk meg a $y' = ky, y(0) = 1$ kezdetiérték problémát, ahol $k \neq 0$ paraméter!

Megoldásvázlat (1) jelöléseit használva $f(x) = k$, $g(y) = y$, így a megoldandó egyenlet

$$\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \int k \, \mathrm{d}x.$$

Ebből $\ln(y) = kx + c$, azaz $y = \tilde{c} \cdot e^{kx}$.

$y(0) = 1$ kezdetiérték feltételből $\tilde{c} = 1$, azaz $y = e^{kx}$.

2. feladat Oldjuk meg az $y' = (y^2 + 1) \cdot x$, $y(-1) = 1$ kezdeti érték problémát, majd ellenőrizzük le a kapott megoldást!

Megoldásvázlat (1) jelöléseit használva $f(x) = x$, $g(y) = 1 + y^2$, így a megoldandó egyenlet

$$\int \frac{1}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y = \int x \, \mathrm{d}x.$$

Ebből $\arctan(y) = \frac{x^2}{2} + c$, azaz $y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$.

$y(-1) = 1$ kezdetiérték feltételből $c = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, azaz $y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$.

A megoldás visszahelyettesítéssel ellenőrizhető.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Általános alakja:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \tag{2}$$

ahol p, q ismert, folytonos függvények.

(2) általános megoldása:

$$y(x) = c \cdot e^{-\int p \, \mathrm{d}x} + \int q \cdot e^{\int p \, \mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x \cdot e^{-\int p \, \mathrm{d}x}.$$

A megoldóképlet nélkül is megoldható az egyenlet: konstans variációs módszerrel. Ez 2 lépésből:

1. Homogén rész megoldása:

   $y' + p(x) \cdot y = 0$ szétválasztható egyenletként megoldható.

2. Inhomogén egyenlet megoldása:

   Ha a homogén rész általános megoldása $y = F(c, x)$, akkor keressük $y = F(c(x), x)$ alakban. Ezt behelyettesítve (2) egyenletbe, $c(x)$ meghatározható, ebből pedig y.

3. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$xy' = \cos x - 2y \tag{3}$$

Megoldásvázlat

Megoldóképlettel (2) jelöléseit használva $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = \frac{\cos x}{x}$. Ebből

- $\int p \, \mathrm{d}x = 2 \ln x$,
- $e^{\int p \, \mathrm{d}x} = x^2$,
- $\int q \cdot e^{\int p \, \mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \sin x \cdot x + \cos x$ (parciális integrálással).

Így az általános megoldás: $y(x) = \frac{c}{x^2} + (\sin x \cdot x + \cos x) \cdot \frac{1}{x^2}$.

Konstans variációs módszer

1. A homogén rész: $y' = -\frac{2}{x} \cdot y$. Ez szétválasztható, amiből $y = c \cdot x^{-2}$.
2. A megoldást $y = c(x) \cdot x^{-2}$ alakban keressük. Visszahelyettesítve (3) egyenletbe

$$c'(x) = x \cdot \cos x.$$

Ebből parciális integrálással $c(x) = \sin x \cdot x + \cos x$. Vagyis

$$y(x) = \frac{c}{x^2} + (\sin x \cdot x + \cos x) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Homogén fokszámú egyenlet

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

alakú egyenlet $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel $u' = \frac{f(u)-u}{x}$ alakra hozható, ami szétválasztható differenciálegyenlet. Ezt megoldva megkapjuk u-t, ahonnan $y(x) = x \cdot u(x)$.

4. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{2x + y}{y - x} \tag{5}$$

Megoldásvázlat (5) átírható $y' = \frac{2+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}$ alakba, azaz (4) jelöléseit használva $f(u) = \frac{2+u}{u-1}$. Az u-ra kapott szétválasztható egyenlet:

$$u' = \frac{2 + 2u - u^2}{u - 1} \cdot \frac{1}{x}.$$

A megoldandó integrálegyenlet:

$$\int \frac{u - 1}{2 + 2u - u^2} \, \mathrm{d}u = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Ebből $-u^2 + 2u + 2 = c \cdot x^{-2}$, amiből $y(x) = x \cdot u(x) = x \cdot (1 \pm \sqrt{3x^2 + c})$.