Matematika A3 építőmérnököknek 1. gyakorlat
Szétválasztható és elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Szétválasztható differenciálegyenletek

Szétválasztható differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{1}$$

ahol $g(y) \neq 0$. Ekkor az egyenlet általános megoldását a

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

egyenlet megoldásából kaphatjuk meg.

1. feladat Oldjuk meg a $y' = ky, y(0) = 1$ kezdetiérték problémát, ahol $k \neq 0$ paraméter!

2. feladat Oldjuk meg az $y' = (y^2 + 1) \cdot x$, $y(-1) = 1$ kezdeti érték problémát, majd ellenőrizzük le a kapott megoldást!

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Általános alakja:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \tag{2}$$

ahol p, q ismert, folytonos függvények.

(2) általános megoldása:

$$y(x) = c \cdot e^{-\int p\,\mathrm{d}x} + \int q \cdot e^{\int p\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \cdot e^{-\int p\,\mathrm{d}x}.$$

A megoldóképlet nélkül is megoldható az egyenlet: konstans variációs módszerrel. Ez 2 lépésből:

1. Homogén rész megoldása:

   $y' + p(x) \cdot y = 0$ szétválasztható egyenletként megoldható.

2. Inhomogén egyenlet megoldása:

   Ha a homogén rész általános megoldása $y = F(c, x)$, akkor keressük $y = F(c(x), x)$ alakban. Ezt behelyettesítve (2) egyenletbe, $c(x)$ meghatározható, ebből pedig y.

3. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$xy' = \cos x - 2y \tag{3}$$

Homogén fokszámú egyenlet

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

alakú egyenlet $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel $u' = \frac{f(u)-u}{x}$ alakra hozható, ami szétválasztható differenciálegyenlet. Ezt megoldva megkapjuk u-t, ahonnan $y(x) = x \cdot u(x)$.

4. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{2x + y}{y - x} \tag{5}$$