Matematika A3 építőmérnököknek 2. gyakorlat
Egzakt és autonóm differenciálegyenletek, stabilitás

Egzakt differenciálegyenletek

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

alakú egyenlet egzakt pontosan akkor, ha M, N parciális deriváltjai léteznek és folytonosak és

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ekkor létezik $F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ potenciálfüggvény, amire $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ és (1) általános megoldása $F(x,y) = c$, ahol c tetszőleges konstans.

1. feladat Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet: $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$.

Megoldásvázlat $M(x,y) = e^y$, $N(x,y) = xe^y + 2y$, így $\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Ekkor a potenciálfüggvény:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = xe^y + f(y),$$

ahol $f(.)$ tetszőleges függvény.
Másrészt $\frac{\partial F}{\partial y} = N$-ből tudjuk, hogy

$$xe^y + f'(y) = xe^y + 2y$$

azaz $f(y) = y^2 + c$.
Így az egyenlet általános megoldása

$$xe^y + y^2 = c.$$

Autonóm differenciálegyenletek, stabilitás

Autonóm differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(y). \tag{2}$$

Egyensúlyi helyzetek (vagy kritikus pontok) az $f(y) = 0$ egyenlet megoldásai. Ahol $f(y) \neq 0$, ott szétválasztható egyenletként megoldható (2).

Egyensúlyi helyzetek osztályozásához a fázisvonalakat kell ábrázolni, melyek iránya f előjelétől függ. Lehetséges típusok: aszimptotikusan stabil, instabil, félig-stabil. Fázisvonalak segítségével az egyenlet megoldásai vázlatosan ábrázolhatók.

2. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából, továbbá vázlatosan ábrázolja is a megoldásokat:

$$y' = (2-y)\ln y.$$

Megoldásvázlat : $f(y) = (2-y)\ln y$ gyökei $y = 1$ és $y = 2$. Mivel f csak az $(1,2)$ intervallumon pozitív, így az $y = 1$ instabil, $y = 2$ pedig aszimptotikusan stabil.

Ennek megfelelően a megoldásgörbék: $y = 1$-ben és $y = 2$-ben konstans, $y > 2$ és $y < 1$ esetén csökkenőek, $1 < y < 2$ esetén pedig növőek.

Iránymező

$y' = f(x,y)$ megoldásait $f(x,y) = c$ egyenletek megoldásának segítségével ábrázoljuk.

3. feladat Vázoljuk fel a differenciálegyenlet megoldásait!

$$y' = x^2 + y^2 - 2.$$

Megoldásvázlat Ha $x^2+y^2-2=-1$, akkor $x^2+y^2=1$, vagyis ez az origó középpontú egységsugarú kör.

Ha $x^2+y^2-2=0$, akkor $x^2+y^2=2$, vagyis ez az origó középpontú $\sqrt{2}$ sugarú kör.
Ha $x^2+y^2-2=1$, akkor $x^2+y^2=3$, vagyis ez az origó középpontú $\sqrt{3}$ sugarú kör.

További feladatok

4. feladat Tekintsük az $y'=y^3-y^2$ differenciálegyenletet. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és ezek típusát, illetve az inflexiós pontokat! Rajzoljuk le a fázisegyenest, és néhány jellemző integrálgörbét! Adjuk meg az analitikus megoldást is!

Megoldás vázlat Egyensúlyi helyzetek $y=0$ és $y=1$. Ebből $y=0$ félig-stabil, $y=1$ instabil.

Megoldásgörbék egyensúlyi helyzetben konstansok, $y<0$ és $0<y<1$ esetén csökkenőek, $1<y$ esetén növekvőek.

Az egyenlet az egyensúlyi helyzeteken kívül szétválaszthatóként megoldható. Az integrálás törtekre bontás segítségével végezhető el, az általános megoldás például $y>1$ esetén:

$$\ln(y-1)-\ln(y)+\frac{1}{y}=x+c.$$

5. feladat Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'=\frac{\frac{y^3}{x^4}+y}{\frac{y^2}{x^3}-x}$$

Megoldásvázlat Az egyenlet egzakt. A hozzátartozó potenciálfüggvény

$$F(x,y)=\frac{y^2}{x^3}-x+c,$$

így az általános megoldás $\frac{y^2}{x^3}-x=c$.