

Matematika A3 építőmérnököknek 2. gyakorlat

Egzakt és autonóm differenciálegyenletek, stabilitás

Egzakt differenciálegyenletek

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

alakú egyenlet egzakt pontosan akkor, ha M, N parciális deriváltjai léteznek és folytonosak és

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ekkor létezik $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ potenciálfüggvény, amire $\frac{\partial F}{\partial x} = M, \frac{\partial F}{\partial y} = N$ és (1) általános megoldása $F(x, y) = c$, ahol c tetszőleges konstans.

1. feladat Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet: $e^y dx + (xe^y + 2y) dy = 0$.

Autonóm differenciálegyenletek, stabilitás

Autonóm differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(y). \quad (2)$$

Egyensúlyi helyzetek (vagy kritikus pontok) az $f(y) = 0$ egyenlet megoldásai. Ahol $f(y) \neq 0$, ott szétválasztható egyenletként megoldható (2).

Egyensúlyi helyzetek osztályozásához a fázisvonalakat kell ábrázolni, melyek iránya f előjelétől függ. Lehetséges típusok: aszimptotikusan stabil, instabil, félig-stabil. Fázisvonalak segítségével az egyenlet megoldásai vázlatosan ábrázolhatók.

2. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezze azokat stabilitás szempontjából, továbbá vázlatosan ábrázolja is a megoldásokat:

$$y' = (2 - y) \ln y.$$

Iránymező

$y' = f(x, y)$ megoldásait $f(x, y) = c$ egyenletek megoldásának segítségével ábrázoljuk.

3. feladat Vázzuk fel a differenciálegyenlet megoldásait!

$$y' = x^2 + y^2 - 2.$$

További feladatok

4. feladat Tekintsük az $y' = y^3 - y^2$ differenciálegyenletet. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és ezek típusát, illetve az inflexiós pontokat! Rajzoljuk le a fázisegyenest, és néhány jellemző integrálgörbét! Adjuk meg az analitikus megoldást is!

5. feladat Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{\frac{y^3}{x^4} + y}{\frac{y^2}{x^3} - x}$$