Matematika A3 építőmérnököknek 3. gyakorlat
Konstans együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenletek, próbafüggvény-módszer

Konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{1}$$

alakú egyenletet szeretnénk megoldani, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $g(t)$ ismert folytonos függvény.

A megoldás menete két lépésből áll:

1. $ay'' + by' + cy = 0$ homogén egyenlet általános megoldása: $Y_{h,\text{ált}}$
2. (1) egy partikuláris megoldásának meghatározása: y_p

Ezek után (1) általános megoldása: $y = Y_{h,\text{ált}} + y_p$.

A 2. lépésre két módszert tanulunk majd a későbbiekben: próbafüggvény-módszer, illetve konstans variációs módszer (5.heti gyakorlat).

De először 1. lépéssel foglalkozunk.

Homogén rész megoldása

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

egyenlet megoldásának lépései:

(a) Felírjuk a karakterisztikus egyenletet: $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$

(b) Megkeressük a karakterisztikus egyenlet gyökeit: r_1, r_2

(c) Meghatározzuk az általános megoldást:

- Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 \neq r_2$, akkor $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
- Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 = r_2$, akkor $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$
- Ha $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$ és $r_1 = u + iv$ (azaz $r_2 = u - iv$), akkor $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^{ut} \cos(vt) + c_2 e^{ut} \sin(vt)$

1. feladat Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet: $y'' + 4y = 0$!

Megoldásvázlat A karakterisztikus egyenlet $r^2 + 4 = 0$. Gyökök $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$. Ez a fenti (c) eset $u = 0$, $v = 2$-vel, így az általános megoldás $Y_{h,\text{ált}} = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$.

2. feladat Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Megoldásvázlat A karakterisztikus egyenlet $r^2 - 2r + 1 = 0$, így a gyökök $r_1 = r_2 = 1$. Ez tehát (b) eset, így $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^t + c_2 t e^t$.

Próbafüggvény-módszer

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{3}$$

egyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározására akkor tudjuk használni a próbafüggvényt-módszert, ha

$$g(t) = e^{ut} \cdot (A_n(t) \cos(vt) + B_m(t) \cdot \sin(vt))$$

alakú valamilyen $u, v \in \mathbb{R}$-re és A_n, B_m n-ed, illetve m-edfokú polinomra, azaz

$$A_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots a_1 t + a_0,$$

$$B_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots b_1 t + b_0$$

alakúak adott $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots b_m$ együtthatókra.

Legyen $s \in \{0, 1, 2\}$ az $u + iv$ komplex szám multiplicitása a homogén részhez tartozó karakterisztikus egyenletben. Ekkor a partikuláris megoldást

$$y_p = t^s \cdot e^{ut} \cdot (P_k \cdot \cos(vt) + Q_k(t) \cdot \sin(vt))$$

alakban keressük, ahol $k = \max(n, m)$, P_k, Q_k pedig k-adfokú polinomok, azaz

$$P_k(t) = p_k t^k + p_{k-1} t^{k-1} + \dots p_1 t + p_0,$$

$$Q_k(t) = q_k t^k + q_{k-1} t^{k-1} + \dots q_1 t + q_0,$$

ahol az ismeretlen együtthatók a (3) egyenletbe való visszahelyettesítésből adódnak.

3. feladat Adott $g(t)$ esetén milyen alakban keressük a partikuláris megoldást? (Tegyük fel, hogy $s = 0$ a példákban.)

(a) $g(t) = 1 + t^2$

(b) $g(t) = e^{3t}(1 - t)$

(c) $g(t) = e^{-2t} \cdot \sin(4t)$

(d) $g(t) = e^t \cdot (\cos(2t) + (1 + t^3) \cdot \sin(2t))$

Megoldásvázlat

(a) $u = 0$, $v = 0$, $A_n(t) = 1 + t^2$, $B_m = 0$, így $k = \max(2, 0) = 2$, tehát $y_p = p_2 t^2 + p_1 t + p_0$.

(b) $u = 3$, $v = 0$, $A_n(t) = 1 - t$, $B_m = 0$, így $k = \max(1, 0) = 1$, tehát $y_p = e^{3t} \cdot (p_1 t + p_0)$.

(c) $u = -2$, $v = 4$, $A_n(t) = 0$, $B_m = 1$, így $k = \max(0, 0) = 0$, tehát

$$y_p = e^{-2t} \cdot (p_0 \cos(4t) + q_0 \sin(4t)).$$

(d) $u = 1$, $v = 2$, $A_n(t) = 1$, $B_m = 1 + t^3$, így $k = \max(0, 3) = 3$, tehát

$$y_p = e^t \cdot \left((p_3 t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0) \cos(2t) + (q_3 t^3 + q_2 t^2 + q_1 t + q_0) \sin(2t) \right).$$

4. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}!$$

Megoldásvázlat A karakterisztikus egyenlet gyökei 1 és -2, így a homogén rész általános megoldása

$$Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}.$$

Próbafüggvény-módszerrel: $g(t) = e^{-t}$ és -1 nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek (azaz $s = 0$), így a próbafüggvény: $y_p = p_0 e^{-t}$.

Egyenletbe visszahelyettesítésből $p_0 = -\frac{1}{2}$.

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása: $y = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-t}$.

5. feladat Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet: $y'' + 4y = 3 \sin x$!

Megoldásvázlat 1. feladatban láttuk, hogy a homogén rész általános megoldása

$$Y_{h,\text{ált}} = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x).$$

Próbafüggvény-módszerrel: $g(x) = 3 \sin x$ és i nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek (azaz $s = 0$), így a próbafüggvény: $y_p = p_0 \cos x + q_0 \sin x$.

Visszahelyettesítés után $\sin x$-es tagok együtthatóiból $q_0 = 1$, míg $\cos x$-es tagokból $p_0 = 0$.

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \sin x$.

6. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \tag{4}$$

Megoldásvázlat A karakterisztikus egyenlet gyökei 1 és 2, így a homogén rész általános megoldása $Y_{h,\text{ált}} = c_1e^t + c_2e^{2t}$.

Az inhomogén rész $g(t) = 2e^t$. Mivel 1 gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért most $s = 1$, azaz a partikuláris megoldást $y_p = p_0te^t$ alakban keressük. Ezt kétszer lederiválva, majd visszahelyettesítve (4) egyenletbe az e^t együtthatóiból $p_0 = -2$. Így $y_p = -2te^t$, vagyis (4) általános megoldása:

$$y = Y_{h,\text{ált}} + y_p = c_1e^t + c_2e^{2t} - 2te^t.$$

A kezdeti értékekből

$$1 = c_1 + c_2,$$

$$2 = c_1 + 2c_2 - 2.$$

Így $c_1 = -2$, $c_2 = 3$ és $y = -2e^t + 3e^{2t} - 2te^t$.