

## Matematika A3 építőmérnököknek 3. gyakorlat

### Konstans együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenletek, próbafüggvény-módszer

#### Konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (1)$$

alakú egyenletet szeretnénk megoldani, ahol  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $g(t)$  ismert folytonos függvény.

A megoldás menete két lépésből áll:

1.  $ay'' + by' + cy = 0$  homogén egyenlet általános megoldása:  $Y_{h,\text{ált}}$
2. (1) egy partikuláris megoldásának meghatározása:  $y_p$

Ezek után (1) általános megoldása:  $y = Y_{h,\text{ált}} + y_p$ .

A 2. lépésre két módszert tanulunk majd a későbbiekben: próbafüggvény-módszer, illetve konstans variációs módszer (5.heti gyakorlat).

De először 1. lépéssel foglalkozunk.

#### Homogén rész megoldása

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2)$$

egyenlet megoldásának lépései:

- (a) Felírjuk a karakterisztikus egyenletet:  $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$
- (b) Megkeressük a karakterisztikus egyenlet gyökei:  $r_1, r_2$
- (c) Meghatározzuk az általános megoldást:

- Ha  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  és  $r_1 \neq r_2$ , akkor  $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
- Ha  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  és  $r_1 = r_2$ , akkor  $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$
- Ha  $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$  és  $r_1 = u + iv$  (azaz  $r_2 = u - iv$ ), akkor  $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^{ut} \cos(vt) + c_2 e^{ut} \sin(vt)$

**1. feladat** Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet:  $y'' + 4y = 0$ !

**2. feladat** Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 2y' + y = 0$$

#### Próbafüggvény-módszer

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (3)$$

egyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározására akkor tudjuk használni a próbafüggvény-módszert, ha

$$g(t) = e^{ut} \cdot (A_n(t) \cos(vt) + B_m(t) \cdot \sin(vt))$$

alakú valamilyen  $u, v \in \mathbb{R}$ -re és  $A_n, B_m$  n-ed, illetve m-edfokú polinomra, azaz

$$A_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots a_1 t + a_0,$$

$$B_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots b_1 t + b_0$$

alakúak adott  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$  együtthatókra.

Legyen  $s \in \{0, 1, 2\}$  az  $u + iv$  komplex szám multiplicitása a homogén részhez tartozó karakterisztikus egyenletben. Ekkor a partikuláris megoldást

$$y_p = t^s \cdot e^{ut} \cdot (P_k \cdot \cos(vt) + Q_k(t) \cdot \sin(vt))$$

alakban keressük, ahol  $k = \max(n, m)$ ,  $P_k, Q_k$  pedig  $k$ -adfokú polinomok, azaz

$$P_k(t) = p_k t^k + p_{k-1} t^{k-1} + \dots p_1 t + p_0,$$

$$Q_k(t) = q_k t^k + q_{k-1} t^{k-1} + \dots q_1 t + q_0,$$

ahol az ismeretlen együtthatók a (3) egyenletbe való visszahelyettesítésből adódnak.

**3. feladat** Adott  $g(t)$  esetén milyen alakban keressük a partikuláris megoldást? (Tegyük fel, hogy  $s = 0$  a példákban.)

(a)  $g(t) = 1 + t^2$

(b)  $g(t) = e^{3t}(1 - t)$

(c)  $g(t) = e^{-2t} \cdot \sin(4t)$

(d)  $g(t) = e^t \cdot (\cos(2t) + (1 + t^3) \cdot \sin(2t))$

**4. feladat** Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}!$$

**5. feladat** Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet:  $y'' + 4y = 3 \sin x!$

**6. feladat** Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \tag{4}$$